

令和元年度 修士論文

サービスシェアリングのある待ち行列モデルの
安定条件と数値解析法

千葉大学大学院融合理工学府
地球環境科学専攻都市環境システムコース

18WM1360 松尾容典

指導教員：塩田茂雄

令和2年3月提出

概要

待ち行列理論では、通常、1つのサービス窓口に対して、1つの客(団体)がサービスを受けるモデルを前提として議論が行われてきた。しかし、現実には、1つのサービス窓口に対して、複数の客がサービスを受けることが可能であるケースも存在する。このような挙動をするモデルは、これまで考えられていないため、本論文では、1つのサービス窓口に対して、複数の客がサービスを受けることが可能であるモデルを、サービスシェアリングのあるモデルと呼び、研究対象とした。

本論文では、はじめに、待ち行列理論を用いて、サービスシェアリングのあるモデルを定義した。サービスシェアリングのあるモデルの定義にあたっては、客の到着過程やサービス時間分布に特徴を与えずにモデル化した、一般的なサービスシェアリングのあるモデルと、客の到着過程がポアソン過程に、サービス時間分布が指数分布に従うようにモデル化した、M/M/1条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの2通りのモデル化を行った。本論文では、一般的なサービスシェアリングのあるモデルとM/M/1条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの両者に対して、安定条件の導出を行った。また、M/M/1条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルに対して、定常分布や平均待ち行列長を導出した。

安定条件は、サービスシェアリングのあるモデルの利用率と、サービスシェアリングのあるモデルのサービス処理を変更したモデルの利用率との比較による導出、到着客の吸収に着目し、サービスシェアリングのあるモデルの負荷について検討をすることによる導出の2通りの方法により導出した。前者はM/M/1条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルにのみ適用できる安定条件であるが、後者は一般的なサービスシェアリングのあるモデルを対象に安定条件を導出しており、結果として、 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ という安定条件の判別式が得られた。

定常分布の導出にあたっては、木村、滝根らの手法 [6, 8] に倣って、あるレベル N 以下で正規化した定常分布を求めることで、近似解を求める手法を用いた。本論文では、木村、滝根らの手法に加えて、レベル N をヒューリスティックに定める方法の検討を行った。これらの手法を用いて数値解析した結果は、別途作成したサービスシェアリングを表現できるシミュレータによって得られる結果と乖離がないことを確認した。

更に、数値計算アルゴリズムを用いて、複数のパラメータ設定をしたサービスシェアリングのあるモデルの平均待ち行列長を計算することで、サービスシェアリングのあるモデルの特徴をとらえた。

Abstract

We have considered queuing model considering the concept of service sharing. In this model, customers can be paired with multiple customers and receive services at the single counter. We have defined this model using queuing theory. We tried to derive the stability condition and the steady state distribution by numerical analysis for this model. The stability condition of this model was found to be represented by $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$. The stability condition we derived has no restrictions on the arrival process and service time distribution. On the other hand, we have set the following conditions, Poisson arrival process and service time according to exponential distribution in deriving the stationary distribution. Furthermore, this model is a level dependent QBD, therefore we performed numerical calculations with reference to Ref. [6, 8]. In the numerical calculation, we made a proposal on how to determine the reference level N . Finally, we compared the results of the numerical calculations with the results of the simulations and confirmed that there were no major discrepancies.

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究目的	1
1.3	本論文の構成	1
第 2 章	準備	3
2.1	既存研究	3
2.2	待ち行列理論	3
2.2.1	待ち行列理論とは	3
2.2.2	待ち行列のモデル化	4
2.2.3	待ち行列の特徴の表現	4
2.2.4	客が保有する情報の表現方法	6
2.2.5	待ち行列システムが保有する情報の表現方法	6
2.2.6	定常状態とシステムの評価	7
2.2.7	出生死滅過程	7
2.2.8	M/M/1 モデル	9
2.2.9	準出生死滅過程	10
2.2.10	M/M/1 モデルの待ち行列シミュレーション	13
第 3 章	本論	15
3.1	一般的なサービスシェアリングのあるモデルの定義	15
3.1.1	条件設定	15
3.1.2	モデルの表現方法	16
3.2	一般的なサービスシェアリングのあるモデルにおける安定条件	17
3.3	M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの定義	20
3.4	M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件	22
3.4.1	タイプ 2 優先 (K -priority) モデル	22
3.4.2	タイプ 2 非優先 (Non-priority) モデル	25
3.4.3	利用率の比較, 安定条件の導出	27
3.4.4	M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルと K -priority モデルの比較	28

3.4.5	M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルと Non-priority の比較	30
3.4.6	M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件 . .	32
3.5	定常状態確率の数値計算法	33
3.5.1	数値計算アルゴリズム	33
3.5.2	$\tilde{\mathbf{q}}_N$ の定め方	34
3.5.3	N の定め方	35
3.6	M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのシミュレーション .	36
3.7	数値計算例	39
3.7.1	数値計算結果とシミュレーション実行結果の比較	39
3.7.2	$\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ について	41
3.7.3	M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの特徴	41
第 4 章	結論	44
	謝辞	45
	参考文献	46

第1章

序論

1.1 研究背景

ある行列が存在したときに、その行列に並んでからサービスが完了するまでにかかる平均時間や、その行列に並んでいる平均人数、客を捌ききれずに延々と行列が伸びてしまうような状態に陥る条件などを検討する理論として、待ち行列理論が存在する。待ち行列理論は通常、1つのサービス窓口に対して、1つの客(団体)がサービスを受けるモデルを前提として議論が行われてきた。コンビニにおいて、一台のレジに人が並び、一人ずつ会計を済ませるようなケースが該当する。一方で、実際のサービスにおいては共用が許されるケースも散見される。遊園地において、一つのアトラクションに複数の客が同時に乗り込むケースや、タクシー乗り場において別々の客が相乗りするようなケースが該当する。このような1つのサービス窓口に対して、複数の客が共用してサービスを受けることが可能であるモデルを、サービスシェアリングのあるモデルと呼び、本論文の研究対象とする。

1.2 研究目的

本論文は待ち行列理論を用いて、サービスシェアリングのあるモデルの解析を行う。具体的には、サービスシェアリングのあるモデルを待ち行列理論を用いて定義する。また、安定条件の導出や、数値計算によって求められる定常分布を用いた、平均待ち行列長の評価によって、サービスシェアリングのあるモデルの特徴を明らかにすることを目的としている。

1.3 本論文の構成

本論文は以下のような構成になっている。

2章

どのような先行研究が存在したうえで、本論文が執筆されているのか、説明を行う。また、待ち行列理論を学んだことがない人でも内容が分かるように、本論文で用いる範囲の待ち行列理論のエッセンスを記載する。具体的には、待ち行列システムの表現方法、代表的なモデル、シミュレーションの実行方法を記載する。

3章

はじめに、サービスシェアリングのあるモデルを、 $G/G/1$ モデルを拡張した形で定義し、安定条件の導出を行う。また、 $M/M/1$ モデルを拡張した形でサービスシェアリングのあるモデルを定義し、こちらについても安定条件の導出を行う。 $M/M/1$ 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルは、数値計算アルゴリズムを用いて、定常分布の導出ができることを示し、実際に数値計算アルゴリズムを用いて、 $M/M/1$ 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの平均待ち行列長の導出を行う。また、数値計算アルゴリズムにより求めた平均待ち行列長が正しいことを確認するために、 $M/M/1$ 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの挙動を模したシミュレーションを作成し、平均待ち行列長を求めた。更に、数値計算アルゴリズムを用いて、複数のパラメータ設定をしたサービスシェアリングのあるモデルの平均待ち行列長を計算することで、サービスシェアリングのあるモデルの特徴をとらえる。

4章

3章の、どの部分が重要なことを示しているのかについて述べる。また、数値計算結果から得られる、サービスシェアリングのあるモデルの特徴や、運用方法についても述べる。

第 2 章

準備

2.1 既存研究

待ち行列理論は通常、1つのサービス窓口に対して1つの客(団体)がサービスを受けるモデルを前提として議論が行われてきた。ところが、実際のサービスにおいては、サービス窓口の共用が許されるケースも散見される。遊園地において、一つのアトラクションに対して複数の客が同時に乗り込むケースや、タクシー乗り場において、別々の客が相乗りするようなケースが該当する。特に後者は、客によってサービスシェアリングの可否が異なるケースである。このような、複数の客による単独サービス窓口の共用を考慮したモデルを、本論文ではサービスシェアリングのあるモデルと呼び、研究対象としている。

ところで、サービスシェアリングのあるモデルは、レベル依存 QBD であり、レベル依存 QBD であるモデルは定常状態分布を導出することが難しいことが知られている。そこで、本論文では、レベル依存 QBD であるサービスシェアリングのあるモデルに対して、先行研究 [4, 5, 6, 7, 8, 11] の手法に倣い、定常分布の近似解を導出する数値計算方法を提示した。レベル依存 QBD であるモデルの定常分布の解析手法としては、レベル依存 QBD の公比行列と定常分布を導出する手法 [5] や、文献 [5] より実装を簡単にし、消費メモリの削減を達成した手法 [7]、有界な無限小生成作用素 Q を用いて、M/G/1 型、GI/M/1 型のレベル依存 QBD の定常分布を導出する手法 [4] などが存在する。また、文献 [4] で提案されている手法は、近似解と厳密解の相対誤差が保証されている。本論文では、文献 [4] で提案されている手法の流れを汲む木村、滝根らの解析手法 [6, 8, 11] に倣い、定常分布の近似解を導出した。

2.2 待ち行列理論

本論文では、待ち行列理論を用いて、サービスシェアリングのあるモデルを表現し、安定条件や平均待ち行列長の導出を試みている。本節を読むことで、3章の内容が理解できるように、待ち行列理論の初歩的な部分を説明する。

2.2.1 待ち行列理論とは

待ち行列理論とは、遊園地のアトラクション待ちの列や、チケット売り場の行列といった、待ち行列について数理的に解析する理論である。待ち行列理論は、電話交換機の仕様(通話の需要量に対する必要な回線数など)を検討するために研究が始まり、1909年に発表されたアーランの論文

[1] に端を発する。待ち行列理論の歴史については、文献 [13] を参照されたい。一口に待ち行列といっても、対象となる現実の事象は幅広く、先に挙げた、遊園地のアトラクション待ちの列に代表されるような、人が並ぶ待ち行列、交差点で信号が赤に変わるのを待つ車列に代表されるような、車が並ぶ待ち行列、データ送信における、パケットに分割されたデータの送信待機列に代表されるような、データパケットが並ぶ待ち行列など、枚挙にいとまがない。待ち行列理論は、その名前からもわかる通り、待ち行列に関する疑問に対して、解を与える理論である。待ち行列理論では、行列に並んだ客がサービスを終了し、行列を離脱するまでにどれくらい時間がかかるのか (平均待ち時間)、待ち行列には常にどの程度の客が並んでいるのか (平均待ち行列長)、待ち行列の客がうまく捌かれず、待ち行列が延々と伸びてしまわないようにするためには、客が待ち行列に到着する頻度 (到着率) と客が窓口でサービスを受けてから終了するまでかかる時間 (サービス時間) がどのような関係性であればいいのか (安定条件) といったことを数理的に解析することができる。

2.2.2 待ち行列のモデル化

待ち行列を議論するにあたっては、はじめに対象となる待ち行列のモデル化が必要となる。待ち行列のモデル化に際しては、待ち室と窓口の2つの要素を用いて表現を行う。有名占い師の占いをサービスの例としてとると、占い師に占ってもらう部屋が窓口にあたり、その占いを順番待ちする列が待ち室となる。窓口も、待ち室も複数個のケースも存在する。占い師の例でいえば、有名占い師を2人構える占いの館であれば、窓口も2つになる。また、当日占いの館に飛び入りで来店する客の列と予約客の列と2つの待ち室が存在するケースもありえる。待ち室と窓口からなるシステムを待ち行列システムと呼ぶ。

待ち行列システムが存在すれば、当然そのシステムの利用者が存在する。このような待ち行列システムの利用者のことを客と呼ぶ。客という呼称であるが、客は人に限らず、車やデータパケットがそれに該当するモデルも存在する。客は待ち行列システムを訪れると、窓口が空いていれば直接窓口へ、窓口が空いていなければ待ち室へ加入する。なお、客が待ち行列システムを訪れることを、到着と呼び、客の到着を表す確率過程を到着過程と呼ぶ。待ち室に入った客は一定の規則に従って、窓口が空き次第、窓口へ加入する。その後、窓口でサービスを受けて、サービスが終了すると窓口から退出し、待ち行列システム自体からも離脱する。なお、客が待ち行列システムを離脱することを、退去と呼ぶ。また、客が窓口へ加入してから、退出するまでの時間を、サービス時間と呼ぶ。サービス時間は確率変数として扱い、サービス時間が従う確率分布を、サービス時間分布と呼ぶ。客は待ち行列システムで上記の一連の流れを実行する。待ち行列システムと客の一連の流れを図 2.1 に図示したので、そちらも参考にされたい。なお、待ち室に入った客を窓口へ案内する一定の規則のことをサービス規律と呼ぶ。サービス規律については、次節で説明する。

2.2.3 待ち行列の特徴の表現

個々の待ち行列がどのような特徴を持つのかを一目でわかりやすくするために、ケンドールの記法 [2] というものが考案されている。ケンドールの記法では、 $A/B/c/K$ の順に、客の到着過程 (A)、客のサービス時間分布 (B)、窓口の数 (c)、待ち室の容量 (K) を表すパラメータを記述する。また、サービス規律は $A/B/c/K$ の後ろに記載する。以下に到着過程やサービス時間分布などの

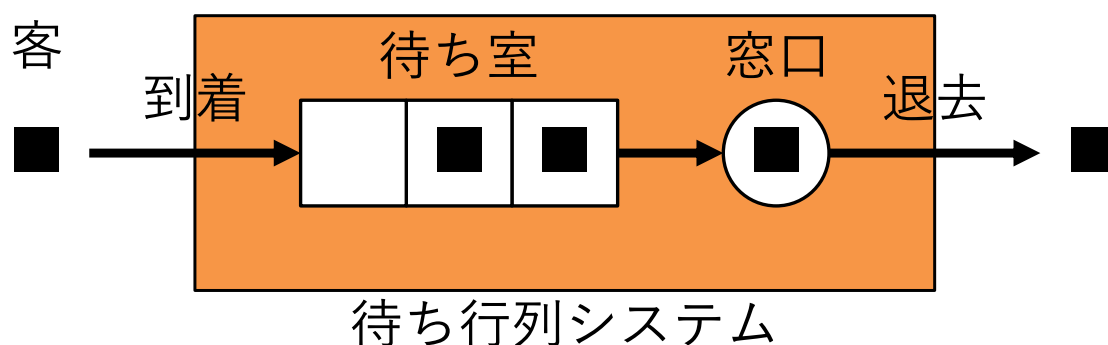


図 2.1: 待ち行列システムの構成要素と客の流れ

一例を記載する。

客の到着過程

客の到着過程は、客の到着間隔分布を記入することで表現する。特に到着過程について制限を設けない場合（一般的な到着過程）にはケンドールの記号の A の部分に G と記入する。すべての到着過程は一般的な到着過程に含まれることになり、到着過程が一般的な到着過程である条件下での定理は、非常に大きな意味を持つ。このほかに、具体的に到着間隔分布を与えないが、客同士の到着間隔に独立性が成立することを保証する再生過程 (GI で表す) や、客同士の到着間隔が指数分布に従うポアソン過程 (M で表す) などがある。

客のサービス時間分布

客のサービス時間分布については、そのまま客のサービス時間分布を記入することで表現する。特にサービス時間分布について制限を設けない場合にはケンドールの記号の B の部分に G と記入する。サービス時間分布についても、すべてのサービス時間分布は一般分布に含まれることになり、サービス時間分布が一般分布である条件下での定理は、非常に大きな意味を持つ。このほかに、具体的にサービス時間分布を与えないが、客のサービス時間に独立性が成立することを保証した一般分布 (GI で表す) や、指数分布 (M で表す) などがある。

窓口の数

窓口の数はシステム内の窓口の個数を c に直接記入することで表現している。なお、窓口の数が客の数に比べて非常に大きいモデル、言い換えれば、常に窓口が客を受け入れることが可能なモデルにおいては ∞ と記入する。

待ち室の容量

待ち室の容量は、待ち室に入れる客の数を K に直接記入することで表現している。なお、待ち室の容量が特に制限されていない場合は ∞ と記入せず、何も書かず省略することが多い。また、 c, K とともに 1 であるモデルは、サービスを受けている客がいるときは、到着した客が待ち行列に加わることができないモデルを表す。

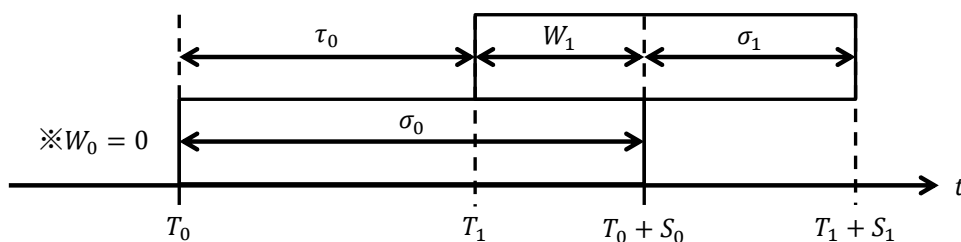


図 2.2: 客が保有する情報の関係性

サービス規律

サービス規律は、サービス規律を表す文字列を $A/B/c/K$ の後ろに記入することで表現している。客の到着時に、行列の最後尾に加入させ、行列の先頭からサービスを順に受けさせる先着順サービス (FIFO で表す) や、客の到着時に、待ち室の先頭に加入させ、行列の先頭からサービスを順に受けさせるサービス規律である非割り込み後着順サービス (LIFO-NP で表す)、客の到着時に、サービス中の客のサービスを中断し、到着客をサービス窓口加入到加入させ、行列の先頭からサービスを順に受けさせる、割り込み継続型後着順サービス (LIFO-PR で表す) などがある。なお、先着順サービスの場合は記入することを省略する場合が多い。

2.2.4 客が保有する情報の表現方法

待ち行列システムは、客の到着、離脱により内部の状態が変化するため、待ち行列システムを数理的に解析するためには、到着時刻や、サービス時間といった、各々の客が保有する情報を表現する必要がある。時刻 $t = 0$ 以降で初めて到着する客を 0 番目の客とする。なお、モデルによっては、0 番目の客の到着時刻が $t = 0$ となるように時刻列 t を定める場合がある。客の到着順が何番目かを表す変数には n がよく用いられている。 n 番目の客の到着と離脱を観測するための変数として、 n 番目の客の到着時刻 T_n 、 n 番目の客の待ち室に滞在する時間 (=待ち時間) W_n 、 n 番目の客の窓口でサービスを受ける時間 (=サービス時間) σ_n 、 n 番目の客の系内滞在時間 S_n を定義する。これらの変数を用いることで、 n 番目の客の到着時刻と離脱時刻を、それぞれ $T_n, T_n + S_n$ と表すことができる。なお、定義より、以下の式が成り立つ。

$$W_n + \sigma_n = S_n. \quad (2.1)$$

また、 n 番目の客と $n+1$ 番目の客の到着間隔を τ_n で表し、こちらも定義より $\tau_n = T_{n+1} - T_n$ となる。図 2.2 において、本小節で定義したパラメータの関係性を表しているのので、併せて確認されたい。

2.2.5 待ち行列システムが保有する情報の表現方法

2.2.4 小節では、客が保有する情報の表現方法を示した。客が保有する情報は n 番目の客各々に関係する変数として定義した。一方で、時刻 t に関する変数も存在し、この変数が待ち行列システムが時刻 t において保有する情報を表すことになる。本論文では、待ち行列システムが保有する

情報として、待ち室とサービス窓口をあわせた客の数である、系内客数 $L(t)$ を定義する。また、サービス窓口の客数を表す、窓口客数 $L_s(t)$ も併せて定義する。特に、待ち室の容量が無限大であるとき、各々の客 n は時刻 $t = T_n$ から時刻 $t = T_n + S_n$ の間だけ待ち行列システムに滞在することから、系内客数 $L(t)$ は以下の式を用いて表すことができる。なお、わかりやすくするために、 $L(0) = 0$ とおくケースがよくみられる。

$$L(t) = \sum_n x(n, t), \quad x(n, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (T_n \leq t < T_n + S_n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

2.2.6 定常状態とシステムの評価

待ち行列システムの性能を評価するにあたっては、定常状態の概念が必要となる。定常状態とは、現在の時刻 t から微小時間 Δt だけ時刻が進んだ時刻 $t + \Delta t$ においても、待ち行列システムが同様の状態をとることを指す。待ち行列システムが、十分時間経過後に定常状態に収束し、以下の極限が存在するのであれば、その時に確率変数 S, L の期待値 $E[S], E[L]$ を用いて、客の平均滞在時間、平均系内客数を求めることができる。

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} L(t).$$

ここで、客の平均滞在時間 $E[S]$ 、平均系内客数 $E[L]$ に対して、以下の公式が成立する。

$$E[L] = \lambda E[S]. \quad (2.2)$$

ただし、 λ は単位時間あたりの到着客数 (到着率) である。式 (2.2) はリトルの公式と呼ばれている。リトルの公式は、客の窓口における平均滞在時間 $E[\sigma]$ と平均窓口客数 $E[L_s]$ に対しても成立する。ただし、 $E[\sigma], E[L_s]$ は、待ち行列システムが、十分時間経過後に定常状態に収束し、 $\sigma_n, L_s(t)$ の極限が存在することが前提である。

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n, \quad L_s \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} L_s(t), \\ E[L_s] = \lambda E[\sigma].$$

ここで、平均窓口客数 $E[L_s]$ は、窓口が客によって占有されている確率と言い換えることもでき、この確率のことを利用率と呼び、 ρ で表す。

2.2.7 出生死滅過程

2.2.7, 2.2.8, 2.2.9 小節では、代表的な待ち行列モデルとして、出生死滅過程、M/M/1 モデル、準出生死滅過程の3つについて解説をする。いずれも、平衡方程式を解くことで、定常分布を求め、平均待ち時間、平均待ち行列長、安定条件を求めている。

出生死滅過程は客の到着過程がポアソン過程に従い、サービス時間分布が指数分布に従う待ち行列モデルを解析するために使われることが多い。出生死滅過程がどのような特徴を持つかを以下に示す。

- 系内客数が i であることを状態 i であるとする
- 客の数が最も少ない状態は状態 0 とする

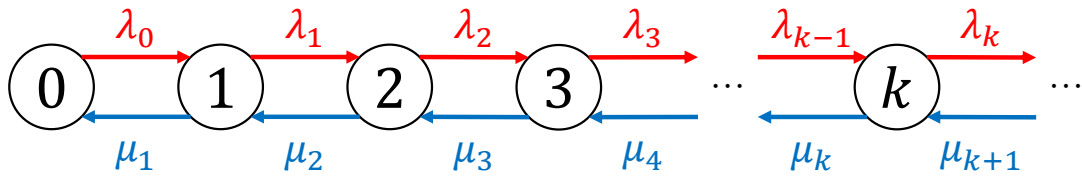


図 2.3: 出生死滅過程の状態遷移図

- 過去の状態遷移に関わりなく、現在の状態のみから未来の状態が決定する
- 状態 i の遷移先が毎回独立である
- 状態 i から一度のイベントで遷移できる先は状態 $i+1$ か状態 $i-1$ のどちらかに限る

以上の条件を満たしたモデルを、出生死滅過程と呼ぶ。

状態 i から状態 $i+1$ に遷移する確率を λ_i 、状態 i から状態 $i-1$ に遷移する確率を μ_i とする。なお、状態 0 よりも小さい状態は存在しないため $\mu_0 = 0$ である。この確率をもとに、状態遷移図を描くと図 2.3 のようになる。ここで出生死滅過程のシステムが定常であるとする、時刻 t における確率分布と時刻 $t + \Delta t$ における確率分布が等しくなることから、各時刻において、ある状態から出力されるフローと入力されるフローは等しくなる。よって図 2.3 をもとに、マルコフチェーン [10] を用いることで、以下のように方程式が書き下せる。ただし q_i は状態 i である確率を表す。なお、この方程式は状態確率が平衡状態であるときに定まる式であり、平衡方程式と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \lambda_0 q_0 &= \mu_1 q_1, \\ (\lambda_k + \mu_k) q_k &= \lambda_{k-1} q_{k-1} + \mu_{k+1} q_{k+1}. \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ここで、上式の左辺と右辺それぞれを $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ まで足し合わせると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \lambda_0 q_0 + (\lambda_1 + \mu_1) q_1 + \dots + (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) q_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k q_k + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k q_k, \\ \mu_1 q_1 + (\lambda_0 q_0 + \mu_2 q_2) + \dots + (\lambda_{n-2} q_{n-2} + \mu_n q_n) &= \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k q_k + \sum_{k=1}^n \mu_k q_k, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k q_k + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k q_k &= \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k q_k + \sum_{k=1}^n \mu_k q_k \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{n-1} q_{n-1} = \mu_n q_n \\ &\Leftrightarrow \quad q_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} q_{k-1}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

式 (2.3) より、 q_k は漸化的に求めることができ、 q_0, λ_k, μ_k を用いて、以下の式で表される。

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} q_{k-1} \\ &= \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2}}{\mu_k \mu_{k-1}} q_{k-2} \\ &= \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} q_0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

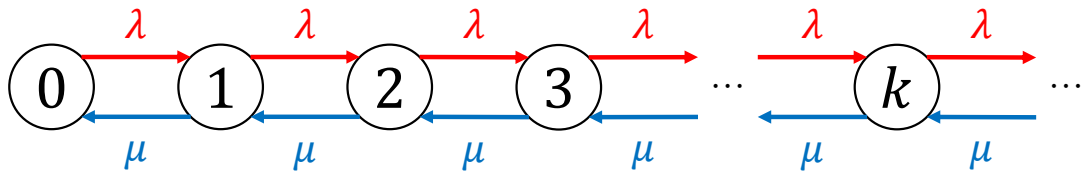


図 2.4: M/M/1 モデルの状態遷移図

上記の式 (2.4) と、状態確率の総和が 1 であることを用いると、以下の式が導出される。

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k = q_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} \right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} \right)^{-1}.$$

よって、上記の式を用いて、 q_0 を求めることで、 $\{q_k\}$ が一意に定まる。ただし、出生死滅過程が定常状態を持つためには q_0 が収束することが条件となる。

2.2.8 M/M/1 モデル

M/M/1 モデルは待ち行列モデルの中でも最も基本となるモデルである。M/M/1 モデルは客がポアソン過程に従って到着し、指数分布時間でシステムから退去する、窓口が一つのモデルである。ここで M/M/1 モデルの特徴を以下に書く。

- 系内客数が i 人であることを状態 i であるとする
- 客数が最も少ない状態は状態 0 とする
- ポアソン過程は、すべての客の到着間隔が互いに独立な到着過程である
- 観測する時刻を微小時間 Δt で考えれば、たかだか Δt の間に、客は一人到着するか退去するかのどちらかである

このように M/M/1 モデルは出生死滅過程であらわすことができるため、出生死滅過程のときと同様に計算ができる。M/M/1 モデルの客は、到着率 λ のポアソン過程に従って到着するため、それぞれの客が独立に平均 λ に従って到着する。よって $\lambda_k = \lambda$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) となる。一方で客の平均サービス時間も指数分布に従うため平均 $1/\mu$ に従って退去する。よって毎時刻、確率 μ でシステムから退去するため到着率と同様に $\mu_k = \mu$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) となる。以上の点をもとに出生死滅過程のときと同様に状態遷移図を描くと図 2.4 のようになる。ここで式 (2.4) に $\lambda_k = \lambda, \mu_k = \mu$ を代入すると、 q_k と q_0 に関する以下の式が得られる。ただし、 $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu$ とする。

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{\lambda}{\mu} q_{k-1} = \rho q_{k-1} \\ &= \rho^2 q_{k-2} \\ &= \rho^k q_0. \end{aligned}$$

上記の式と、状態確率の総和が 1 であることを用いると、以下の式が導出される。

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k = q_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \right) = q_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \right)^{-1}. \quad (2.5)$$

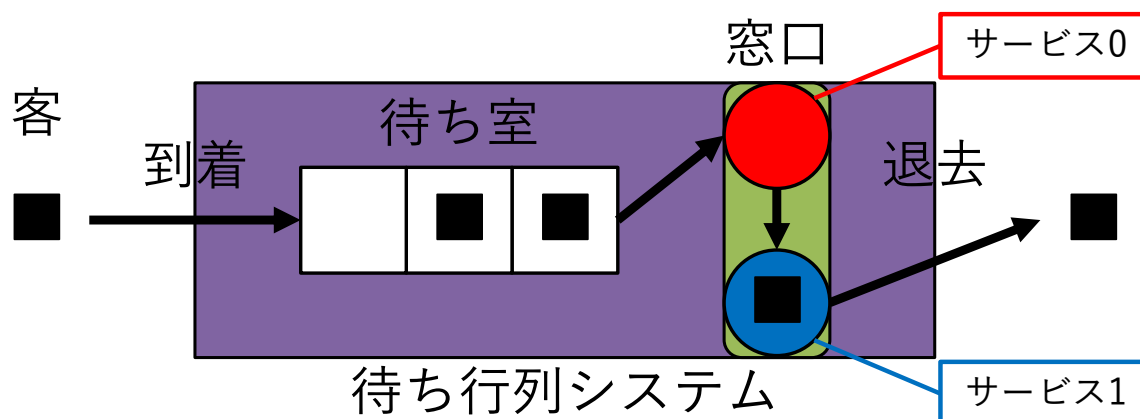


図 2.5: 準出生死滅過程となるモデル例のシステム概略図

よって、上記の式を用いて、 q_0 を求めることで、 $\{q_k\}$ が一意に定まる。ただし、出生死滅過程が定常状態を持つためには q_0 が収束することが条件となる。上式中の $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$ は無限等比級数であり、 $-1 < \rho < 1$ の区間において $1/(1-\rho)$ に収束することが知られている。よって M/M/1 モデルは $\rho < 1$ のときのみ定常状態確率を持つ。このように、待ち行列モデルが、定常状態確率を持つための条件を安定条件と呼び、M/M/1 モデルの場合、 $\rho = \lambda/\mu < 1$ を満たすことが、安定条件となる。よって、安定状態を満たすとき、言い換えると、 $\rho < 1$ のとき $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = 1/(1-\rho)$ を式 (2.5),(2.2) に代入すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} q_0 &= \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = 1-\rho, \\ q_k &= (1-\rho)\rho^k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで平均待ち行列長 $E[L]$ は kq_k の総和で表されるので無限等比級数に関する式 $\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = \rho/(1-\rho)^2$ と式 (2.6) を用いて以下の式が得られる。また、リトルの公式より、平均待ち時間 $E[S]$ も以下の式のように導出される。

$$E[L] = \sum_{k=0}^{\infty} kq_k = (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad E[S] = \frac{E[L]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

2.2.9 準出生死滅過程

準出生死滅過程とは出生死滅過程を発展させた過程である。ここで準出生死滅過程を説明するにあたって、準出生死滅過程の条件を満たす以下のモデルを用いる。

- 客の到着過程はポアソン過程に従い、到着率は λ_1 とする
- 客は窓口で 0 と 1 の 2 つのサービスを受ける
- 客は必ず $0 \rightarrow 1$ の順にサービスを受ける
- 待ち室の先頭客は前の客がサービス 1 を終了したときに窓口に入れる
- 系内客数が i で、窓口の客が受けているサービスの種類が j であることを状態 i, j であるとする
- 窓口は 1 つとする

- 待ち行列は無限に並べるとする
- 客数が最も少ない状態は状態 $0, 0$ とする
- サービス 0 から 1 に移行する到着過程はポアソン過程に従い、到着率は λ_2 とする
- サービス 1 を開始してから退去するまでの時間分布は指数分布に従い、平均 $1/\mu$ とする

このモデルの挙動を図 2.5 に図示したので、併せて確認されたい。以上の条件を元にとすると、状態遷移図は図 2.6 のように描ける。これをもとに平衡方程式を書き下すと、以下の式が得られる。なお、図 2.6 で表現されている状態のうち、鉛直方向に増減する数値 i をレベル、垂直方向に増減する数値 j を相と呼ぶ。

$$\begin{aligned} -\lambda_1 q_{0,0} + \mu q_{1,1} &= 0, \\ \lambda_2 q_{1,0} - (\lambda_1 + \mu) q_{1,1} &= 0, \\ \lambda_1 q_{i-1,0} - (\lambda_1 + \lambda_2) q_{i,0} + \mu q_{i+1,1} &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \lambda_1 q_{i-1,1} + \lambda_2 q_{i,0} - (\lambda_1 + \mu) q_{i,1} &= 0. \quad (i = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

以上の式を行列式を用いて書くと、以下の式で表すことができる。

$$\mathbf{q}Q = \mathbf{0}.$$

ただし、 $\mathbf{0}$ はすべての要素が 0 である行列とし、 \mathbf{q}, Q は以下のように定義する。

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots), \quad \mathbf{q}_0 = q_{0,0}, \quad \mathbf{q}_i = (q_{i,0}, q_{i,1}), \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_0^{(0)} & Q_{+1}^{(0)} & O & O & \dots \\ Q_{-1}^{(1)} & Q_0^{(1)} & Q_{+1}^{(1)} & O & \\ O & Q_{-1}^{(2)} & Q_0^{(2)} & Q_{+1}^{(2)} & \ddots \\ O & O & Q_{-1}^{(i)} & Q_0^{(i)} & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$Q_{+1}^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad Q_0^{(i)} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ 0 & -(\lambda_1 + \mu) \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$Q_{-1}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 2, 3, \dots) \quad Q_{+1}^{(0)} = (\lambda_1 \ 0), \quad Q_0^{(0)} = -\lambda_1, \quad Q_{-1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}.$$

式 (2.7) で記述されている Q のことを推移率行列と呼び、推移率行列が式 (2.7) のようにブロック 3 重体格構造を持つような連続時間マルコフモデルのことを、準出生死滅過程と呼ぶ。準出生死滅過程は Q に内包されているブロック行列 $Q_{-1}^{(i)}, Q_0^{(i)}, Q_{+1}^{(i)}$ のブロックサイズによって 2 種類に分類される。ブロック行列 $Q_{-1}^{(i)}, Q_0^{(i)}, Q_{+1}^{(i)}$ のブロックサイズが、ある一定のレベル i 以上において、変わらないような準出生死滅過程のことを、レベル依存しない準出生死滅過程と呼ぶ。一方で、ブロック行列 $Q_{-1}^{(i)}, Q_0^{(i)}, Q_{+1}^{(i)}$ のブロックサイズが、レベル i に依存し、一定のサイズに固定されることがないような準出生死滅過程のことを、レベル依存する準出生死滅過程と呼ぶ。なお、今回例に挙げたモデルは、レベル $i = 2$ 以降において、ブロック行列 $Q_{-1}^{(i)}, Q_0^{(i)}, Q_{+1}^{(i)}$ が 2×2 の行列に固定されることから、レベル依存しない準出生死滅過程であることがわかる。なお、ブロック行列

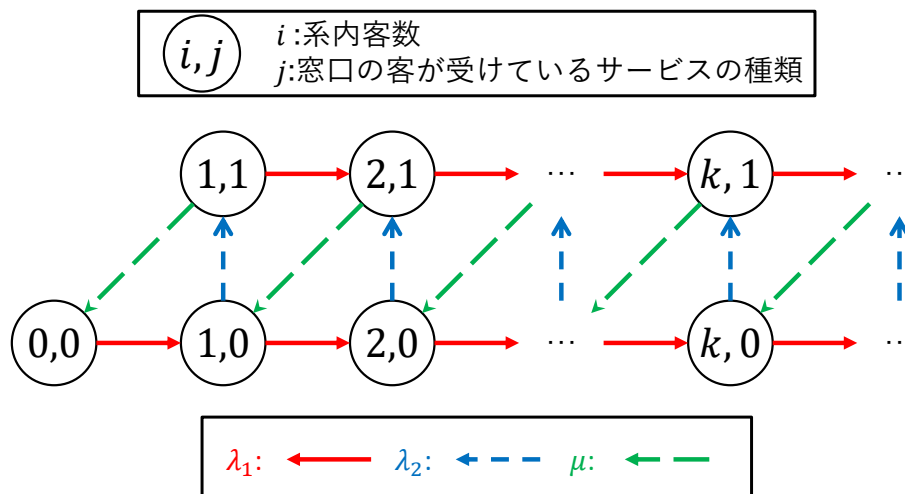


図 2.6: 準出生死滅過程となるモデル例の状態遷移図

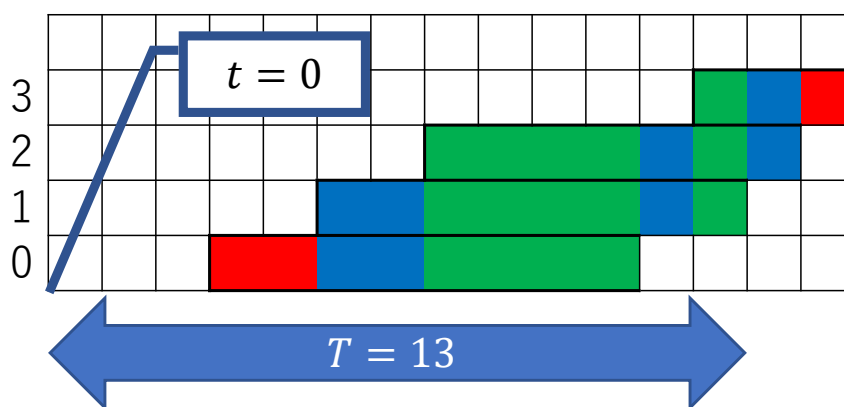


図 2.7: 平均系内客数の計算概略図

$Q_{-1}^{(i)}, Q_0^{(i)}, Q_{+1}^{(i)}$ は、それぞれ右下についている数字からもわかる通り、レベルが1減る、レベルが変わらない、レベルが1増えるような遷移を表している。

定常状態確率の導出方法は文献 [14] に任せて、ここでは準出生死滅過程の安定条件について述べる。準出生死滅過程では、M/M/1 モデルの安定条件の式 $\rho = \lambda/\mu < 1$ にあたるものとして、以下の式で表される、ドリフト条件の判別式が存在する。

$$\tilde{q}Q_{+1}\mathbf{1}^\top < \tilde{q}Q_{-1}\mathbf{1}^\top.$$

$$\tilde{q}\tilde{Q} = 0, \quad \tilde{q}\mathbf{1}^\top = 1, \quad \tilde{Q} = Q_{+1} + Q_0 + Q_{-1}.$$

ただし、ドリフト条件の判別式は、レベル依存しない準出生死滅過程にしか用いることができず、レベル依存する準出生死滅過程の安定条件を直接求めることは難しい。

2.2.10 M/M/1 モデルの待ち行列シミュレーション

M/M/1 モデルは到着間隔、窓口滞在時間が共に指数分布に従うことから、シミュレーションを用いて、簡単に平均滞在時間 $E[S]$ や平均系内客数 $E[L]$ を求めることができる。本小節では、文献 [9, 16] を参考にしつつ、M/M/1 モデルの待ち行列シミュレーションの実行方法について記載する。はじめに、平均滞在時間 $E[S]$ 、平均系内客数 $E[L]$ が以下の式で求まることを示す。ただし、時刻 0 以降に、はじめて到着する客を 0 番目の客とし ($T_{-1} < 0 \leq T_0$)、時刻 0 から時刻 T の間に待ち行列システムに到着する客の数を N とする。さらに、 n 番目に到着した客の滞在時間を S_n とする。なお、 $L(0) = 0$ とする。

$$E[S] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n, \quad E[L] = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S_n. \quad (2.8)$$

平均滞在時間 $E[S]$ が上式で求まることは自明である。一方で平均系内客数 $E[L]$ に関しては説明が必要である。ここで、客の到着時刻と離脱時刻をまとめて、時刻 0 に近い順に並べなおして、時刻列 T'_m を定義する。ただし、 $T'_0 = 0, T'_M = T_{N-1} + S_{N-1} \geq T$ とする。また、系内客数の増減が発生する間隔を $\tau'_m = T'_{m+1} - T'_m$ で定義する。 τ'_m は系内客数の増減が発生する間隔であるため、区間 $[T'_m, T'_{m+1})$ 間の系内客数は一定であるから、区間 τ'_m における系内客数を $L_{\tau'_m}$ とおくと、平均系内客数 $E[L]$ は以下の式で求めることができる。

$$E[L] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \tau'_m L_{\tau'_m}. \quad (2.9)$$

この式は自明である。なお、時刻 T は必ずしも N 番目の客の離脱時刻と等しいとは限らないが、 T を十分に大きくとることで、誤差の影響を小さくするようにしている。式 (2.9) の計算方法を図解したものが図 2.7 である。図 2.7 では各期間 τ'_m における系内客数 $L_{\tau'_m}$ を、分かりやすく色別に分けている。赤色の部分が系内客数が 1 である区間、青色の部分が系内客数が 2 である区間、緑色の部分が系内客数が 3 である区間を指す。図 2.7 のケースで、 $T = 13$ とし、客 0 が時刻 3 に到着し、時刻 11 に離脱、客 1 が時刻 5 に到着し、時刻 13 に離脱、客 2 が時刻 7 に到着し、時刻 14 に離脱、客 3 が時刻 12 に到着し時刻 15 に離脱したケースである。ところで、図 2.7 の色がついた部分の総和は、全ての客の滞在時間の総和になっている。イメージとしては、系内客数毎に縦方向に区切ったものの総和と、客毎に横方向に区切ったものの総和が等しいということである。このことから、 $\sum_{m=0}^{M-1} \tau'_m L_{\tau'_m} = \sum_{n=0}^{N-1} S_n$ となるため、式 (2.8) が成り立つことが分かる。

以上のことから、客の滞在時間 $\{S_n\}$ さえシミュレーションで導出することができれば、平均滞在時間 $E[S]$ や平均系内客数 $E[L]$ を求めることができる。では、滞在時間 $\{S_n\}$ はどのようにして求まるのだろうか。はじめに、式 (2.2) より、 $W_n + \sigma_n = S_n$ となる。M/M/1 モデルの場合、サービス時間 σ_n は指数分布に従って与えることができる。一方で待ち時間 W_n は時刻 T_n において、 $n-1$ 番目の客が待ち行列システムを離脱しているか否かに依存し、以下の式で表すことができる。

$$W_n = \begin{cases} 0 & (T_n > T_{n-1} + S_{n-1}) \\ T_{n-1} + S_{n-1} - T_n = \tau_n + S_{n-1} & (\text{otherwise}) \end{cases}. \quad (2.10)$$

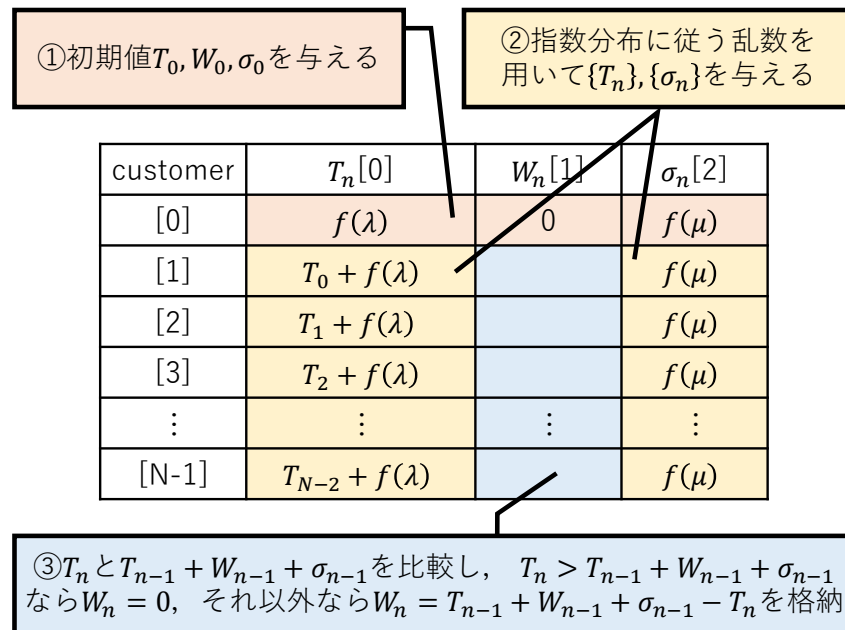


図 2.8: 配列操作イメージ図

M/M/1 モデルの場合、客の到着間隔 τ_n は指数分布に従って与えることができる。よって、 n 番目の客の滞在時間 S_n は、指数分布に従って与えられるパラメータ σ_n, τ_n と $n-1$ 番目の客の滞在時間 S_{n-1} により計算できる。よって、 $\{S_n\}$ は漸化的に計算でき、 $L(0) = 0$ より、 $W_0 = 0, S_0 = \sigma_0$ となり、結果的に、客の到着間隔 $\{\tau_n\}$ 、サービス時間 $\{\sigma_n\}$ をそれぞれパラメータ λ, μ の指数分布に従う乱数 $f(\lambda), f(\mu)$ によって与えることで、客の滞在時間 $\{S_n\}$ をシミュレーションすることができる。

本小節で説明したシミュレーションのアルゴリズムを簡潔に書くと以下のようなになる。配列に格納するイメージ図 2.8 も用意したので併せて確認されたい。

STEP1 初期値 T, W_0, σ_0 を定める。

STEP2 T を元に、パラメータ μ, λ の指数分布に従う乱数 $f(\mu), f(\lambda)$ を用いて、それぞれ $\{\sigma_n\}, \{\tau_n\}$ を発生させる

STEP3 $\{\sigma_n\}, \{\tau_n\}$ を元に、式 (2.10) を用いて $\{W_n\}, \{S_n\}$ を計算する

STEP4 $T, N, \{S_n\}$ を元に、式 (2.1), (2.8) を用いて $E[S], E[L]$ を求める

第 3 章

本論

3.1 一般的なサービスシェアリングのあるモデルの定義

3.1.1 条件設定

はじめに、サービスシェアリングのあるモデルの条件設定をする。本論文においては、G/G/1/FIFO モデルを拡張することで、サービスシェアリングのあるモデルを定義する。

G/G/1/FIFO モデルは、客の到着過程、サービス時間分布に制約を設けないモデルである。客は 1 つの窓口に対して列を成し、先着順にサービスを受けるモデルである。G/G/1/FIFO モデルにおいては、客に対してタイプ A, タイプ B のように分類せずに、一括りに扱うが、サービスシェアリングのあるモデルでは、客を K 種類のタイプに分類し、それぞれの客に対して、タイプ $k(k = 1, 2, \dots, K)$ の客といったようにラベル付けを行う。また、G/G/1/FIFO モデルにおいては、客は他の客とグループを組まず、単体でサービスを受けるが、サービスシェアリングのあるモデルでは、客は自身のタイプ k に依存して、最大 $G_k < \infty$ 人のグループを組んで、同じタイプ k の客と同時にサービスを受ける (サービスシェアリングを拒否する客が属するタイプを k' とした場合、 $G_{k'} = 1$ となる)。さらに、G/G/1/FIFO モデルにおいては、客は待ち行列の最後尾に加わるが、サービスシェアリングのあるモデルでは、自身と同じタイプ k のグループに加入する可能性がある。具体的には、構成人数が G_k 未満のタイプ k のグループ (以降、未完成グループ) が待ち行列に存在すれば、そのグループに加入し、自身と同じタイプ k の客の未完成グループが待ち行列に存在しない場合は G/G/1/FIFO モデルと同様に、待ち行列の最後尾に単体で加わる。また、客個人にはサービス時間が与えられず、グループに対してサービス時間が与えられるとする。グループのサービス時間は、グループの先頭客が到着したタイミングに、客のタイプ k に依存するサービス時間分布によって与えられるとし、グループの構成人数には依存しないとする。なお、サービスシェアリングのあるモデルは、サービス窓口でサービスを受け始めている未完成グループに、新たに到着した客が加入することを許す場合と、許さない場合の二通りのサービス処理を考えることができる。客の加入を表している図 3.1 では、サービスシェアリングのあるモデルは、サービス窓口でサービスを受け始めている未完成グループに、新たに到着した客が加入することを許す場合を表現している。以降、サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許す場合を軸に議論を進める。サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合を考慮する際には、逐一その旨を示すこととする。

以上のように、G/G/1/FIFO モデルとサービスシェアリングのあるモデルは、客にタイプが付与されること、他の客とグループを組んで、サービスを受けることが可能であること、未完成グ

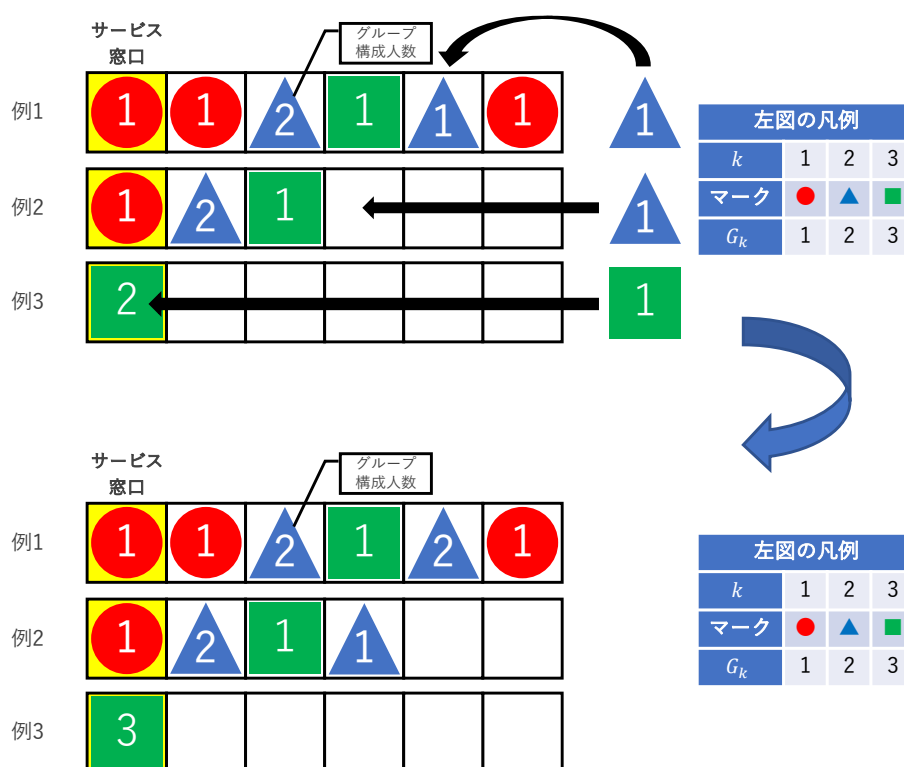


図 3.1: 客の加入のイメージ図

グループが存在すれば、そのグループに加入すること、客個人にサービス時間が与えられず、グループに対してサービス時間が与えられることの四点において、性質が異なる。以降、 $G/G/1/FIFO$ モデルを拡張することで定義したサービスシェアリングのあるモデルのことを、一般的なサービスシェアリングのあるモデルと呼ぶ。

3.1.2 モデルの表現方法

一般的なサービスシェアリングのあるモデルの安定条件を導出するにあたって、待ち行列理論の枠組みで話をするために、パラメータを用いてモデルの表現を行う。

客の到着と離脱に関わるパラメータ

客のサービスは行列の先頭にいる客(グループ)から行われる、客個人にはサービス時間が与えられず、グループに対してサービス時間が与えられるとする。グループのサービス時間は、グループの先頭客が到着したタイミングに、客のタイプ k に依存するサービス時間分布によって与えられるとし、サービス時間の期待値は客のタイプ k に依存し、 $1/\mu_k$ とする。また、サービス時間はグループの構成人数には依存しないとする。本論文においては、定常性とエルゴード性を仮定し、以

下の変数を用いる.

$$\lambda_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{E[\tau_0^{(k)}]}, \quad \rho_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_k}{\mu_k}.$$

待ち行列の状態を表すパラメータ

各タイプ $k(k = 1, 2, \dots, K)$ において, 時刻 0 以降に最初に到着した客を, タイプ k の 1 番目の客とし, タイプ k の n 番目の客の到着時刻を $T_n^{(k)}$ (ただし $T_0^{(k)} \leq 0 < T_1^{(k)}$), タイプ k の n 番目の客と, $n-1$ 番目の客の到着間隔を $\tau_n^{(k)}$ ($\stackrel{\text{def}}{=} T_n^{(k)} - T_{n-1}^{(k)}$), タイプ k の n 番目の客の滞在時間を $S_n^{(k)}$ とする. さらに, タイプ k の n 番目の客の到着時に, 未完成グループが待ち行列内に存在するか否かを表す変数 $I_n^{(k)}$ を以下のように定義する.

$$I_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{時刻 } T_n^{(k)} \text{ にサービス窓口を含め, 系内にタイプ } k \text{ の未完成グループが存在しない} \\ 0, & \text{時刻 } T_n^{(k)} \text{ にサービス窓口を含め, 系内にタイプ } k \text{ の未完成グループが存在する} \end{cases}. \quad (3.1)$$

なお, $I_n^{(k)} = 0$ とは, 時刻 $T_n^{(k)}$ に到着した客が未完成グループに吸収されることを表す.

負荷を表すパラメータ

安定条件の導出に用いるため, 一般的なサービスシェアリングのあるモデルの, 負荷について考える. $I_n^{(k)} = 0$ となる客は未完成グループに吸収されるため, サービス窓口から見た際には, 客が到着していないことと等価であることが分かる. また, $I_n^{(k)} = 1$ となる客は通常の待ち行列モデルと変わりなく最後尾に加入する. よって $I_n^{(k)} = 0$ となる客は無視して, $I_n^{(k)} = 1$ となる客のみに着目すると, 一般的なサービスシェアリングのあるモデルは, サービスシェアリングの概念のない通常の G/G/1 待ち行列システムと等価になる. したがって, 一般的なサービスシェアリングのあるモデルの負荷 ρ は以下の式によって定義できる.

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K \rho_k E[I_0^{(k)}]. \quad (3.2)$$

3.2 一般的なサービスシェアリングのあるモデルにおける安定条件

本節では, 一般的なサービスシェアリングのあるモデルの安定条件 (待ち行列長や残余サービス時間が確率 1 で有限である条件 [3]) について考察する.

定理 3.2.1. $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ が成立することが, 一般的なサービスシェアリングのあるモデルが安定するための必要十分条件である.

証明. 前節で定義したように, 一般的なサービスシェアリングのあるモデルの負荷は $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E[I_0^{(k)}]$ であるから, $\rho < 1$ であることが一般的なサービスシェアリングのあるモデルが安定であるための必要十分条件である. 必要十分条件が成立することを示す前に, 以下の補題が成立することを示す.

補題 3.2.2. $E \left[I_0^{(k)} \right]$ と G_k について, 次の関係式が常に成立する.

$$E \left[I_0^{(k)} \right] \geq \frac{1}{G_k}$$

証明. 式 (3.1) より, $E \left[I_0^{(k)} \right]$ は以下の式で表すことができる.

$$E \left[I_0^{(k)} \right] = P \left(\left\{ I_0^{(k)} = 1 \right\} \right) = 1 - P \left(\left\{ I_0^{(k)} = 0 \right\} \right).$$

ここで, $\left\{ I_0^{(k)} = 0 \right\}$ とは, タイプ k の $-G_k + 1$ 番目から -1 番目の客のいずれかが, 未完成グループの先頭客となり, かつその客が時刻 $T_0^{(k)}$ においても系内にいる事象と等価であるため, 以下の式で定義できる.

$$\left\{ I_0^{(k)} = 0 \right\} = \bigcup_{n=-G_k+1}^{-1} \varepsilon_n^0(k), \quad \varepsilon_n^0(k) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \cap \left\{ S_n^{(k)} > T_0^{(k)} - T_n^{(k)} \right\}.$$

ここで, 以下の補題が成立する.

補題 3.2.3. $\varepsilon_n^0(k) (n = -G_k + 1, \dots, -1)$ は互いに背反である.

証明. $\varepsilon_a^0(k) (a = -G_k + 1, \dots, -2)$ のとき, タイプ k の a 番目の客は, $\left\{ S_a^{(k)} > T_0^{(k)} - T_a^{(k)} \right\}$ より, 時刻 $T_0^{(k)}$ においても系内に存在する. よってタイプ k の 0 番目の客は, タイプ k の a 番目の客が先頭客である未完成グループに $-a + 1$ 人目として加入することになる. すると, タイプ k の $n = a + 1, a + 2, \dots, -1$ 番目の客も, タイプ k の a 番目の客が先頭客である未完成グループに加入することになる. よってタイプ k の $n = a + 1, \dots, -1$ 番目の客は未完成グループの先頭客にはなり得ず,

$$P \left(\varepsilon_a^0(k) \cap \varepsilon_n^0(k) \right) \leq P \left(\varepsilon_a^0(k) \cap \left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \right) = 0 \quad (n = a + 1, \dots, -1),$$

となることから, $\varepsilon_a^0(k)$ と $\varepsilon_n^0(k) (n = a + 1, \dots, -1)$ はそれぞれ背反であることが分かる. 以上のことから, $\varepsilon_n^0(k) (n = -G_k + 1, \dots, -1)$ は互いに背反であることが証明できる. \square

補題 3.2.3 より,

$$\begin{aligned} P \left(\left\{ I_0^{(k)} = 0 \right\} \right) &= P \left(\bigcup_{n=-G_k+1}^{-1} \varepsilon_n^0(k) \right) = \sum_{n=-G_k+1}^{-1} P \left(\varepsilon_n^0(k) \right), \\ E \left[I_0^{(k)} \right] &= 1 - P \left(\left\{ I_0^{(k)} = 0 \right\} \right) = 1 - \sum_{n=-G_k+1}^{-1} P \left(\varepsilon_n^0(k) \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる. また, $\varepsilon_n^0(k) = \left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \cap \left\{ S_n^{(k)} > T_0^{(k)} - T_n^{(k)} \right\}$ より, $P \left(\varepsilon_n^0(k) \right) \leq P \left(\left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \right) = E \left[I_n^{(k)} \right] = E \left[I_0^{(k)} \right]$ となることから,

$$E \left[I_0^{(k)} \right] = 1 - \sum_{n=-G_k+1}^{-1} P \left(\varepsilon_n^0(k) \right) \geq 1 - \sum_{n=-G_k+1}^{-1} E \left[I_0^{(k)} \right] = 1 - (G_k - 1) E \left[I_0^{(k)} \right],$$

となる。上式を変形することで,

$$E \left[I_0^{(k)} \right] \geq 1/G_k, \quad (3.4)$$

が得られる。□

はじめに, 必要条件: $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] < 1$ なら, $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ であることを示す。必要条件については, 補題 3.2.2 より, $E \left[I_0^{(k)} \right] \geq 1/G_k$ であるから,

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] \geq \sum_{k=1}^K \rho_k / G_k,$$

が成立し, 簡単に必要条件: $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] < 1$ なら, $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ が示せる。

次に, 十分条件: $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ なら, $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] < 1$ であることを示す。実際には, 対偶の $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] \geq 1$ なら, $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k \geq 1$ であることを示す。はじめに, $n \geq -G_k + 1$ のケースに着目し, 定常性を用いて, 以下の不等式を得る。

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_n^0(k)) &= P\left(\left\{I_n^{(k)} = 1\right\} \cap \left\{S_n^{(k)} > T_0^{(k)} - T_n^{(k)}\right\}\right) \\ &= P\left(\left\{I_n^{(k)} = 1\right\} \cap \left\{S_n^{(k)} > \tau_{n+1}^{(k)} + \cdots + \tau_0^{(k)}\right\}\right) \\ &\geq P\left(\left\{I_n^{(k)} = 1\right\} \cap \left\{S_n^{(k)} > \tau_{n+1}^{(k)} + \cdots + \tau_0^{(k)} + \cdots + \tau_{n+G_k-1}^{(k)}\right\}\right) \\ &= P\left(\left\{I_n^{(k)} = 1\right\} \cap \left\{S_0^{(k)} > \tau_1^{(k)} + \cdots + \tau_{G_k-1}^{(k)}\right\}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで, システムが安定でない (すなわち $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] \geq 1$) とすると, $P(S_0^{(k)} = \infty) = 1$ となり [3], 以下の式を得る。

$$P(\varepsilon_n^0(k)) \geq P\left(\left\{I_n^{(k)} = 1\right\} \cap \left\{S_0^{(k)} > \tau_1^{(k)} + \cdots + \tau_{G_k-1}^{(k)}\right\}\right) = P\left(\left\{I_n^{(k)} = 1\right\}\right) = E \left[I_0^{(k)} \right]. \quad (3.6)$$

式 (3.3) に式 (3.6) を代入することで

$$E \left[I_0^{(k)} \right] = 1 - \sum_{n=-G_k+1}^{-1} P(\varepsilon_n^0(k)) \leq 1 - \sum_{n=-G_k+1}^{-1} E \left[I_0^{(k)} \right] = 1 - (G_k - 1)E \left[I_0^{(k)} \right],$$

が得られ, この式を変形することで $E \left[I_0^{(k)} \right] \leq 1/G_k$ を得る。一方で, 補題 3.2.2 より, $E \left[I_0^{(k)} \right] \geq 1/G_k$ であるから, $E \left[I_0^{(k)} \right] = 1/G_k$ であり, したがって

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] = \sum_{k=1}^K \rho_k / G_k,$$

となり, 十分条件: $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k E \left[I_0^{(k)} \right] \geq 1$ なら, $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k \geq 1$ が示せる。□

注 3.2.4. サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合は, 3.1, 3.2 節で議論してきた内容をそれぞれ以下のように追加, 変更することで, サービス窓口に存在する未完成グ

ループへの加入を許さない場合も同様の安定条件が得られる．はじめに，タイプ k の n 番目の客のサービス時間を $\sigma_n^{(k)}$ とする．また， $I_n^{(k)}$ の定義を以下のように変更する．

$$I_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{時刻 } T_n^{(k)} - \text{ にサービス窓口を除き，系内にタイプ } k \text{ の未完成グループが存在しない} \\ 0 & \text{時刻 } T_n^{(k)} - \text{ にサービス窓口を除き，系内にタイプ } k \text{ の未完成グループが存在する} \end{cases} .$$

$I_n^{(k)}$ の定義を変更したことにより， $\varepsilon_n^0(k)$ の定義も以下のように変更する．なお，補題 3.2.3 は加入を許さない場合でも同様に成立する．

$$\varepsilon_n^0(k) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \cap \left\{ S_n^{(k)} - \sigma_n^{(k)} > T_0^{(k)} - T_n^{(k)} \right\} .$$

$\varepsilon_n^0(k)$ の定義を変更したことにより，式 (3.5) の変形も以下のように変化する．

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_n^0(k)) &= P\left(\left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \cap \left\{ S_n^{(k)} - \sigma_n^{(k)} > T_0^{(k)} - T_n^{(k)} \right\}\right) \\ &= P\left(\left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \cap \left\{ S_n^{(k)} > \sigma_n^{(k)} + \tau_{n+1}^{(k)} + \cdots + \tau_0^{(k)} \right\}\right) \\ &\geq P\left(\left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \cap \left\{ S_n^{(k)} > \sigma_n^{(k)} + \tau_{n+1}^{(k)} + \cdots + \tau_0^{(k)} + \cdots + \tau_{n+G_k-1}^{(k)} \right\}\right) \\ &= P\left(\left\{ I_n^{(k)} = 1 \right\} \cap \left\{ S_0^{(k)} > \sigma_0^{(k)} + \tau_1^{(k)} + \cdots + \tau_{G_k-1}^{(k)} \right\}\right) . \end{aligned}$$

ここで，タイプ k の客のサービス時間の期待値は $1/\mu_k$ で表されることから， $\sigma_0^{(k)} < \infty$ となり， $P(\varepsilon_n^0(k)) \geq E\left[I_0^{(k)}\right]$ という関係性は，加入を許さない場合においても成立する．

3.3 M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの定義

本節では，次節以降で数値計算を行うために，一般的なサービスシェアリングのあるモデルに，客の到着過程がポアソン過程に従い，客のサービス時間分布が指数分布に従うという制約を設けたサービスシェアリングのあるモデル（以降，M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデル）の条件設定をする．

なお，本論文の執筆の過程で，M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルに対しても安定条件を導出できたため，次節以降に M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件の導出方法を併せて記載する． $K = 2$ 種類のタイプの客を用意し，それぞれタイプ 1，タイプ 2 と呼ぶ．タイプ 1 の客はグループを組まずに（言い換えれば最大 $G_1 = 1$ 人のグループを組んで）サービスを受ける．タイプ 2 の客は最大 G_2 人のグループを組んで，サービスを受ける．タイプ 1 の客は，到着時に行列の最後尾に 1 人で並ぶ．タイプ 2 の客の到着処理は，サービス窓口を含めて，同じタイプ 2 の未完成グループが存在すればその位置に，いなければ行列の最後尾に 1 人で並ぶ．以下では，タイプ 1，2 の客は，それぞれ到着率 λ_1 および λ_2 のポアソン過程に従って到着する．また，タイプ 1，2 の客のサービス時間は，客が待ち行列に到着したタイミングではなく，客がサービス窓口でサービスを受け始めたタイミングに与えられるとする．客がサービス窓口でサービスを受け始めた時に客（グループ）に付与されるサービス時間は，客のタイプやグループの構成人数に関わらず平均 $1/\mu$ の指数分布に従う，つまり， $1/\mu_1 = 1/\mu_2 = 1/\mu$ とする．

以降、時刻 t における系内客数を $L(t)$ で表す。ただし、グループは何人でグループを組んでも、1人としてカウントする。また、タイプ2の未完成グループの待ち行列の先頭からの位置を $I(t)$ 、タイプ2の未完成グループの構成人数を $J(t)$ で表す。ただし、未完成グループが待ち行列に存在しない場合は、 $I(t) = J(t) = 0$ とする。これらの確率変数を用いた確率過程 $\{L(t), I(t), J(t); t \geq 0\}$ は連続時間マルコフ連鎖となる。待ち行列に並んでいる人数が $l (l \geq 0)$ 、未完成グループの位置が $i (0 \leq i \leq l)$ 、未完成グループの構成人数が $j (0 \leq j \leq G-1)$ である状態を、 (l, i, j) で表し、状態 (l, i, j) の定常状態分布を $q_{l,i,j}$ で表す。さらに、待ち行列に並んでいる人数が $l (> 1)$ の定常分布ベクトルを辞書式に $\mathbf{q}_l \stackrel{\text{def}}{=} (q_{l,0,0}, q_{l,1,1}, \dots, q_{l,1,G-1}, \dots, q_{l,l,1}, \dots, q_{l,l,G-1})$ と定める。また、 $q_{0,0,0}$ は q_0 と記す。定常分布の大域平衡方程式は以下のように行列形式に書き下すことができる。

$$\begin{aligned} q_0 Q_0^{(0)} + \mathbf{q}_1 Q_{-1}^{(1)} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{q}_{l-1} Q_{+1}^{(l-1)} + \mathbf{q}_l Q_0^{(l)} + \mathbf{q}_{l+1} Q_{-1}^{(l+1)} &= \mathbf{0}. \quad (l = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

大域平衡方程式に表れるブロック行列は以下の通りである。

$$\begin{aligned} Q_{+1}^{(l)} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0}^\top & \lambda_1 I_{G-1} & O & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & \cdots & O & \lambda_1 I_{G-1} & O \end{pmatrix}, \quad Q_{-1}^{(l)} = \begin{pmatrix} \mu & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mu \mathbf{1}^\top & O & \cdots & O \\ \mathbf{0}^\top & \mu I_{G-1} & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & \cdots & O & \mu I_{G-1} \end{pmatrix}, \\ Q_0^{(l)} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) I_{l(G-1)+1} + \begin{pmatrix} 0 & O & \cdots & O \\ \lambda_2 \mathbf{e}_{G-1}^\top & \lambda_2 I_{G-1}^+ & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 \mathbf{e}_{G-1}^\top & O & \cdots & \lambda_2 I_{G-1}^+ \end{pmatrix}, \\ Q_0^{(0)} &= -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad I_n^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^\top & I_{n-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

さらに $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}_1, \dots)$ とし、 Q を以下の式で定義することで、大域平衡方程式は $\mathbf{q}Q = \mathbf{0}$ と書ける。

$$Q = \begin{pmatrix} Q_0^{(0)} & Q_{+1}^{(0)} & O & \cdots & \cdots \\ Q_{-1}^{(1)} & Q_0^{(1)} & Q_{+1}^{(1)} & \ddots & \\ O & Q_{-1}^{(2)} & Q_0^{(2)} & Q_{+1}^{(2)} & \ddots \\ \vdots & \ddots & Q_{-1}^{(l)} & Q_0^{(l)} & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ここで、 $\mathbf{0}$ は全ての要素が0の横ベクトル、 $\mathbf{1}$ は全ての要素が1の横ベクトル、 \mathbf{e}_n は $\mathbf{0}$ の n 番目の要素のみを1に置き換えた横ベクトル、 I_n は n 次の単位行列を表す。なお、 $M_k \stackrel{\text{def}}{=} (G-1)k+1$ とすると、ブロック行列 $Q_m^{(k)}$ は $M_k \times M_{k+m}$ の行列であり、レベル k に依存するサイズを有する。つまり、本待ち行列モデルは、レベル依存準出生死滅過程 (レベル依存 QBD) になる。

注 3.3.1. サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合は、 \mathbf{q}_l, M_k の定義が以

下のように変更される.

$$\mathbf{q}_l \stackrel{\text{def}}{=} (q_{l,0,0}, q_{l,2,1}, \dots, q_{l,2,G-1}, \dots, q_{l,l,1}, \dots, q_{l,l,G-1}), \quad M_k \stackrel{\text{def}}{=} (G-1)(k-1) + 1.$$

なお, \mathbf{q}_l について, $q_{l,0,0}$ の次に $q_{l,2,1}$ が来るのは, 未完成グループは先頭の位置には存在せず, $I(t) = 1$ となるケースが存在しないことに起因する. また, $I(t) = 1$ となるケースが存在しないことから, $q_1 \stackrel{\text{def}}{=} q_{1,0,0}$ となる. 大域平衡方程式に現れるブロック行列についても, $Q_{-1}^{(1)}, Q_{+1}^{(0)}, Q_0^{(1)}$ の3つに変更が生じる.

$$Q_{-1}^{(1)} = \mu, \quad Q_{+1}^{(0)} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad Q_0^{(1)} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu).$$

3.4 M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件

M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルは, 準出生死滅過程であるが, ブロック行列のサイズがレベル依存であるため, このままではドリフト条件を用いて安定条件を導出するには不便な形となっている. M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件の導出方法としては, フォスターの定理 [15] を用いた方法も考えられるが, 本論文では, 到着した客のサービス規律を変えた2つのモデルである, タイプ2優先 (K -priority) モデル, タイプ2非優先 (Non-priority) モデルと M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの利用率を比較することで, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件の検討を行う. なお, 本節では, サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合について, 安定条件の導出を行う.

3.4.1 タイプ2優先 (K -priority) モデル

M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルは, ブロック行列がレベル依存であることが, 安定条件の導出を難しくしていた. そこで, サービスを受けていない未完成グループが存在しないときに到着したタイプ2の客を, 待ち行列の先頭から K 番目に並ばせるサービス規律を考える. ただし, 待ち行列に並んでいる人数が K 未満の場合, 従来通り待ち行列の最後尾に並ばせる. 本論文では, このようなサービス規律を持つモデルをタイプ2優先モデルと呼ぶ. 以降, 略称として K -priority モデル, もしくは KP モデルと呼ぶ. K -priority モデルにおける大域平衡方程式は, 以下のように行列形式に書き下すことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 Q_0^{(0)} + \mathbf{q}_1 Q_{-1}^{(1)} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{q}_{l-1} Q_{+1}^{(l-1)} + \mathbf{q}_l Q_0^{(l)} + \mathbf{q}_{l+1} Q_{-1}^{(l+1)} &= \mathbf{0}, \quad (l = 1, \dots, K-1) \\ \mathbf{q}_{K-1} Q_{+1}^{(K-1)} + \mathbf{q}_K Q_0^{(K)} + \mathbf{q}_{K+1} A_{-1} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{q}_{l-1} A_{+1} + \mathbf{q}_l Q_0^{(K)} + \mathbf{q}_{l+1} A_{-1} &= \mathbf{0}. \quad (l = K+1, K+2, \dots) \end{aligned}$$

ここで $Q_{+1}^{(l)}$, $Q_0^{(l)}$, $Q_{-1}^{(l)}$ は、いずれも M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルで定義した行列である。また、 A_{+1} と A_{-1} は $M_K \times M_K$ の正方行列で、以下の式で表される。

$$A_{+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \lambda_2 e_1 \\ \mathbf{0}^\top & \lambda_1 I_{G-1} & O & \cdots & O \\ \mathbf{0}^\top & O & \lambda_1 I_{G-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & O & \cdots & O & \lambda_1 I_{G-1} \end{pmatrix},$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mu \mathbf{1}^\top & O & \cdots & \cdots & O \\ \mathbf{0}^\top & \mu I_{G-1} & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & \cdots & O & \mu I_{G-1} & O \end{pmatrix}.$$

なお、 K -priority モデルでは、系内容数が l 人である定常分布ベクトル \mathbf{q} は、 $l \leq K$ のときは M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのときと同じであるが、 $l > K$ のとき、以下のように長さ M_K の横ベクトルとなる。

$$\mathbf{q}_l = (q_{l,0,0}, q_{l,2,1}, \dots, q_{l,2,G-1}, \dots, q_{l,K,1}, \dots, q_{l,K,G-1}). \quad (l = K, K+1, \dots)$$

K -priority モデルは、 $A_{+1}, Q_0^{(K)}, A_{-1}$ がいずれも M_K 次の正方行列となることから、確率過程 $\{L(t), I(t), J(t); t \geq 0\}$ は、系内容数が K 人以上のとき、ブロック行列の大きさが $M_K \times M_K$ で固定する準出生死滅過程となり、その定常分布は以下で与えられる。

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_K R^{l-K}. \quad (l = K+1, K+2, \dots)$$

ただし、 R は公比行列であり、以下の方程式を満たす非負最小解として与えられる。

$$A_{+1} + RQ_0^{(K)} + R^2 A_{-1} = O.$$

また $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_K$ は以下の解である。

$$(\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_K) \begin{pmatrix} Q_0^{(0)} & Q_{+1}^{(1)} & O \\ Q_{-1}^{(0)} & Q_0^{(1)} & Q_{+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{-1}^{(K-2)} & Q_0^{(K-1)} & Q_{+1}^{(K)} \\ O & Q_{-1}^{(K-1)} & Q_0^{(K)} + RA_{-1} \end{pmatrix} = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}),$$

$$\mathbf{q}_0 \mathbf{1}^\top + \cdots + \mathbf{q}_K (I - R)^{-1} \mathbf{1}^\top = 1.$$

K -priority モデルの安定条件は、

$$Q^{(K)} \stackrel{\text{def}}{=} A_{+1} + Q_0^{(K)} + A_{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \lambda_2 e_1 \\ \lambda_2 e_{G-1}^\top + \mu \mathbf{1}^\top & C & O & \cdots & O \\ \lambda_2 e_{G-1}^\top & \mu I_{G-1} & C & \ddots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ \lambda_2 e_{G-1}^\top & O & \cdots & \mu I_{G-1} & C \end{pmatrix},$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_2 (I_{G-1}^+ - I_{G-1}) - \mu I_{G-1},$$

の定常分布 $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_0, \tilde{q}_{1,1}, \dots, \tilde{q}_{K-1,G-1})$ が以下のドリフト条件 [12] を満たすかどうかで定まる.

$$\tilde{\mathbf{q}}A_{+1}\mathbf{1}^\top < \tilde{\mathbf{q}}A_{-1}\mathbf{1}^\top.$$

ドリフト条件は $\rho_1 + \tilde{q}_0\rho_2 < 1$ と等価である.

補題 3.4.1. $\tilde{q}_0, \tilde{q}_{i,j}$ は以下で定まる. 次の補題が成立する.

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{i,j} &= \binom{K-i+j-2}{j-1} (1-h)^{K-1-i} h^j \tilde{q}_0, \\ \tilde{q}_0 &= \left(G - (1+\rho_2)^{-(K-1)} \sum_{j=1}^{G-1} \sum_{k=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right)^{k-1} \binom{K+k-3}{k-1} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

証明. はじめに $\tilde{q}_{i,j}$ を \tilde{q}_0 を用いて表すために, $\tilde{\mathbf{q}}Q^{(K)} = \mathbf{0}$ を以下のように書き下す.

$$\begin{aligned}\mu\tilde{q}_{i+1,1} &= (\mu + \lambda_2)\tilde{q}_{i,1}, \quad (i = 1, \dots, K-2) \\ \lambda_2\tilde{q}_{i,j-1} + \mu\tilde{q}_{i+1,j} &= (\mu + \lambda_2)\tilde{q}_{i,j}, \quad (i = 1, \dots, K-2, j = 2, \dots, G-1) \\ \lambda_2\tilde{q}_0 &= (\mu + \lambda_2)\tilde{q}_{K-1,1}, \\ \lambda_2\tilde{q}_{K-1,j-1} &= (\mu + \lambda_2)\tilde{q}_{K-1,j}. \quad (j = 2, \dots, G-1)\end{aligned}$$

上記の連立方程式を解くことにより, 以下が得られる.

$$\tilde{q}_{i,j} = a_{i,j} (1-h)^{K-1-i} h^j \tilde{q}_0, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right).$$

ここで $a_{i,j} (i = 1, \dots, K-1, j = 1, \dots, G-1)$ は以下を満たす定数である.

$$\begin{aligned}a_{i,j} &= \sum_{k=i}^{K-1} a_{k,j-1}, \quad (i = 1, \dots, K-1, j = 1, \dots, G-1) \\ a_{i,1} &= 1. \quad (i = 1, \dots, K-1)\end{aligned}$$

これより $a_{i,j} = \binom{K-i+j-2}{j-1}$ が得られる. さて $g(j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{K-1} \tilde{q}_{i,1}$ とおくと, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned}g(1) &= \sum_{i=1}^{K-1} \tilde{q}_{i,1} = h \sum_{i=1}^{K-1} a_{i,1} (1-h)^{K-1-i} \tilde{q}_0 \\ &= h \sum_{i=0}^{K-2} (1-h)^i \tilde{q}_0 = (1 - (1-h)^{K-1}) \tilde{q}_0.\end{aligned}$$

また、以下のように式変形できる.

$$\begin{aligned}
g(j) &= \sum_{i=1}^{K-1} \tilde{q}_{i,j} = h^j \sum_{i=1}^{K-1} a_{i,j} (1-h)^{K-1-i} \tilde{q}_0 = h^j \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{k=i}^{K-1} a_{k,j-1} (1-h)^{K-1-i} \tilde{q}_0 \\
&= h^j \sum_{k=1}^{K-1} a_{k,j-1} \sum_{i=1}^k (1-h)^{K-1-i} \tilde{q}_0 = h^j \sum_{k=1}^{K-1} a_{k,j-1} (1-h)^{K-1-k} \sum_{i=1}^k (1-h)^i \tilde{q}_0 \\
&= h^{j-1} \sum_{k=1}^{K-1} a_{k,j-1} ((1-h)^{K-1-k} - (1-h)^{K-1}) \tilde{q}_0 \\
&= \sum_{i=1}^{K-1} a_{i,j-1} h^{j-1} (1-h)^{K-1-i} \tilde{q}_0 - h^{j-1} (1-h)^{K-1} \sum_{k=1}^{K-1} a_{k,j-1} \tilde{q}_0 \\
&= \sum_{i=1}^{K-1} \tilde{q}_{i,j-1} - h^{j-1} (1-h)^{K-1} a_{1,j} \tilde{q}_0 = g(j-1) - h^{j-1} (1-h)^{K-1} a_{1,j} \tilde{q}_0.
\end{aligned}$$

つまり $g(j)$ についての漸化式が得られる. この漸化式を解くことにより以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
g(j) &= g(1) - h(1-h)^{K-1} a_{1,2} \tilde{q}_0 - \dots - h^{j-1} (1-h)^{K-1} a_{1,j} \tilde{q}_0 \\
&= \tilde{q}_0 - (1-h)^{K-1} \sum_{k=1}^j h^{k-1} \binom{K+k-3}{k-1} \tilde{q}_0.
\end{aligned}$$

全確率が1であることより以下の式

$$\begin{aligned}
1 &= \tilde{q}_0 + \sum_{j=1}^{G-1} \sum_{i=1}^{K-1} \tilde{q}_{i,j} = \tilde{q}_0 + \sum_{j=1}^{G-1} g(j) \\
&= \tilde{q}_0 \left(G - (1-h)^{K-1} \sum_{j=1}^{G-1} \sum_{k=1}^j h^{k-1} \binom{K+k-3}{k-1} \right),
\end{aligned}$$

が得られ, したがって以下の式を得る.

$$\tilde{q}_0 = \left(G - (1-h)^{K-1} \sum_{j=1}^{G-1} \sum_{k=1}^j h^{k-1} \binom{K+k-3}{k-1} \right)^{-1}.$$

□

補題 3.4.1 より, K -priority モデルの安定条件が以下のように得られる.

定理 3.4.2. 以下の式を満たすとき, K -priority モデルは安定である.

$$\rho_1 + \frac{\rho_2}{G - (1 + \rho_2)^{-(K-1)} \sum_{j=1}^{G-1} \sum_{k=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1 + \rho_2} \right)^{k-1} \binom{K+k-3}{k-1}} < 1.$$

3.4.2 タイプ 2 非優先 (Non-priority) モデル

K -priority モデルでは, サービスを受けていない未完成グループが存在しないときに到着したタイプ 2 の客を, 待ち行列の先頭から K 番目に並ばせるサービス規律を考えていた. このサービス

規律は K が小さければ小さいほど、タイプ2の客がペアを組むことができる可能性が低いという特徴を持っている。本小節では、逆に最大限タイプ2の客がペアを組むことができる可能性が高いサービス規律として、未完成グループを『常に』待ち行列の最後尾に並ばせる（サービスを受け始めた未完成グループはこの限りではない）サービス規律を考える。本論文では、このようなサービス規律を持つモデルをタイプ2非優先モデルと呼ぶ。以降、略称として Non-priority モデル、NP モデルと呼ぶ。Non-priority モデルにおける大域平衡方程式は、以下のように行列形式に書き下すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 Q_0^{(0)} + \mathbf{q}_1 Q_{-1}^{(1)} &= 0, \\ \mathbf{q}_0 Q_{+1}^{(0)} + \mathbf{q}_1 Q_0^{(1)} + \mathbf{q}_2 Q_{-1}^{(2)} &= 0, \\ \mathbf{q}_1 Q_{+1}^{(1)} + \mathbf{q}_2 Q_0^{(2)} + \mathbf{q}_3 B_{-1} &= 0, \\ \mathbf{q}_{l-1} B_{+1} + \mathbf{q}_l Q_0^{(2)} + \mathbf{q}_{l+1} B_{-1} &= 0. \quad (l = 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

ここで $Q_{+1}^{(l)}$, $Q_0^{(l)}$, $Q_{-1}^{(l)}$ は、いずれも M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルで定義した行列である。また、 B_{+1} と B_{-1} は $G \times G$ の正方行列で、以下の式で表される。

$$B_{+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 e_1 \\ 0 & \lambda_1 I_{G-1} \end{pmatrix}, \quad B_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mu I_G.$$

Non-priority モデルでは、系内客数 l が2以上のときの定常分布ベクトル \mathbf{q}_l は以下のように長さ G の横ベクトルとなる。

$$\mathbf{q}_l = (q_{l,0,0}, q_{l,2,1}, \dots, q_{l,2,G-1}). \quad (l = 2, 3, \dots)$$

$B_{+1}, Q_0^{(2)}, B_{-1}$ はいずれも G 次の正方行列であることから、Non-priority モデルは確率過程 $\{L(t), I(t), J(t); t \geq 0\}$ は、系内客数が2以上のとき、ブロック行列の大きさが $G \times G$ で固定される準出生死滅過程となり、その定常分布は以下のように与えられる。

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_2 R^{l-2}. \quad (l = 3, 4, \dots)$$

R は R は公比行列であり、以下の方程式を満たす非負最小解として与えられる。

$$B_{+1} + R Q_0^{(2)} + R^2 B_{-1} = O.$$

また、 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ は以下の解である。

$$(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} Q_0^{(0)} & Q_{+1}^{(1)} & \mathbf{0} \\ Q_{-1}^{(0)} & Q_0^{(1)} & Q_{+1}^{(2)} \\ \mathbf{0}^\top & Q_{-1}^{(1)} & Q_0^{(2)} + R B_{-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \mathbf{0}),$$

$$\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 (I - R)^{-1} \mathbf{1}^\top = 1.$$

Non-priority 処理のもとでの安定条件は

$$Q^{(K)} \stackrel{\text{def}}{=} B_{+1} + Q_0^{(2)} + B_{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix},$$

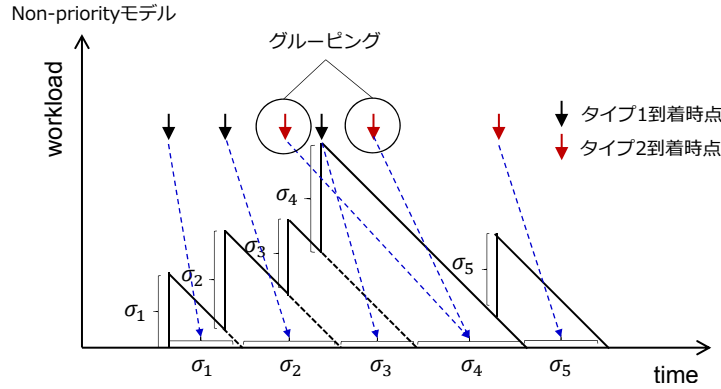


図 3.2: Workload の変化 1(タイプ 2 非優先処理)

の定常分布 $\tilde{\mathbf{q}} = (1/G, \dots, 1/G)$ が以下のドリフト条件 [12] を満たすかどうかで定まる.

$$\tilde{\mathbf{q}}B_{+1}\mathbf{1}^\top < \tilde{\mathbf{q}}B_{-1}\mathbf{1}^\top.$$

これより、以下の結果が得られる.

定理 3.4.3. 以下の式を満たすとき、Non-priority モデルは安定である.

$$\rho_1 + \frac{\rho_2}{G} < 1.$$

3.4.3 利用率の比較, 安定条件の導出

本小節では、当初のポアソン到着、指数サービス時間の仮定を緩め、一般到着、一般サービス時間(ただし再生性は仮定する: $G_1+G_2/GI/1$ モデル)のもとで、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデル、K-priority モデル、Non-priority モデルでの処理をサンプルパス毎に比較しながら、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件を導出する. 比較を容易にするため、サンプル空間 Ω 内の任意の要素 $\omega \in \Omega$ に対して、時刻 0 以降のタイプ 1 およびタイプ 2 の客の到着時刻列 $\{t_n^{(1)}(\omega)\}_{n=1}^\infty$, $\{t_n^{(2)}(\omega)\}_{n=1}^\infty$, および客のサービス時間列 $\{\sigma_n(\omega)\}_{n=1}^\infty$ が定まる確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) を考える. ここで、 σ_n は(時刻 0 以降に)窓口で n 番目にサービスを受ける客のサービス時間を表す. この確率空間では、客のサービス時間は客に付随するものではなく、窓口で何番目にサービスを受けるかで決まる点に留意する. 図 3.2 に $G = 2$ の場合の Non-priority モデルにおける workload の変化を示す. 図 3.2 において、3 番目にタイプ 2 の客が到着すると、その時点で待ち行列システムの workload は σ_3 だけ増加するが、 σ_3 は到着したタイプ 2 の客が窓口で受けるサービス時間ではない. 4 番目にタイプ 1 の客が到着すると、Non-priority モデルにおいてはその客の処理が先に行われ、 σ_3 は 4 番目に到着したタイプ 1 の客が窓口で受けるサービス時間となる. 3 番目に到着したタイプ 2 の客のサービス時間は σ_4 に等しい. 本節では、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデル、K-priority モデル、Non-priority モデルの利用率に着目する. 一般に、使用率 ρ は以下の式で求められることが知られている.

$$\rho = E[\sigma] \times \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t}. \tag{3.7}$$

ただし, $E[\sigma]$ は平均サービス時間を, $N(t)$ は時刻 0 から $t \geq 0$ までの累積到着人数を表し, $N(0) = 0$ を仮定する. 平均サービス時間 $E[\sigma]$ はどのモデルにおいても等しいので, $E[N(t)]$ が使用率 ρ の大きさを左右する, ただ 1 つのパラメータである. ここで, サービス窓口から見た $E[N(t)]$ について考えると, $N(t)$ は, タイプ 1 の累積客数と, 到着時にグルーピングができなかったタイプ 2 の累積客数の和となる. 言い換えると, タイプ 2 の客が到着時にグルーピングできた場合, 系内客数 $L(t)$ は増えていないため, 到着時にグルーピングできたタイプ 2 の客は到着時に間引かれていると考えることができる. よって $N_1(t)$ を時刻 0 から $t \geq 0$ までのタイプ 1 の累積到着人数, $\tilde{N}_2(t)$ を M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルにおいて時刻 0 から $t \geq 0$ までの, 到着時にグルーピングできなかったタイプ 2 の客の累積到着人数とおき, $N_1(0) = \tilde{N}_2(0) = 0$ を仮定することで, 以下の式が成り立つ.

$$N(t) = N_1(t) + \tilde{N}_2(t). \quad (3.8)$$

したがって, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルにおける使用率 ρ は

$$\rho = E[\sigma] \times \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_1(t) + \tilde{N}_2(t)]}{t},$$

となる. 同様に, K -priority モデルおよび Non-priority モデルにおいて, 時刻 $t \geq 0$ までにグルーピングされなかったタイプ 2 の客の累積到着人数を $\tilde{N}_2^{kp}(t)$ および $\tilde{N}_2^{np}(t)$ とおき, K -priority モデルおよび Non-priority モデルにおける使用率をそれぞれ ρ^{kp} および ρ^{np} とおくと,

$$\rho^{kp} = E[\sigma] \times \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_1(t) + \tilde{N}_2^{kp}(t)]}{t}, \quad \rho^{np} = E[\sigma] \times \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_1(t) + \tilde{N}_2^{np}(t)]}{t},$$

となる.

3.4.4 M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルと K -priority モデルの比較

比較のために, 以下の補題を使用する.

補題 3.4.4. $W(t)$ および $W^{kp}(t)$ を, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルおよび K -priority モデルにおける時刻 t での workload とする. このとき $t_n^{(2)} \leq t$ を満たす全ての n について

$$N_2^{kp}(t_n^{(2)}) \geq N_2(t_n^{(2)}), \quad (3.9)$$

が成立し, かつ $N_2^{kp}(t) = N_2(t)$ であるならば, $W^{kp}(t) \leq W(t)$.

証明. M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのもとで, 到着時に未完成グループがないタイプ 2 の客の到着時刻列を $(\tilde{t}_1^{(2)}, \tilde{t}_2^{(2)}, \dots)$ とする. さらに, $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots)$ (タイプ 1 の客の到着時刻列) と $(\tilde{t}_1^{(2)}, \tilde{t}_2^{(2)}, \dots)$ を一緒にして, 昇順に番号を振りなおしたものを (t_1, t_2, \dots) とする. 当初の $G_1 + G_2/GI/1$ キューは到着時刻列が (t_1, t_2, \dots) , サービス時間列が $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ の $G/GI/1$ キューと等価である. 同様に, K -priority モデルのもとで, 到着時にペアリングが行われないタイプ 2 の客の到着時刻列とタイプ 1 の客の到着時刻列を一緒にして, 昇順に

番号を振りなおしたものを $(t_1^{kp}, t_2^{kp}, \dots)$ とする. (3.9) は $t_n \leq t < t_{n+1}$ かつ $t_n^{kp} \leq t < t_{n+1}^{kp}$ が満たされるならば

$$t_n \geq t_n^{kp}, \quad (3.10)$$

であることと等価である. 時刻 t で客の到着がないならば, $t_{l+1}^{kp} \stackrel{\text{def}}{=} t$ とおくとリンドレーの方程式より,

$$\begin{aligned} W^{kp}(t) &= \max \left\{ 0, \max_{k; 1 \leq k \leq n} \sum_{l=k}^n (\sigma_l - (t_{l+1}^{kp} - t_l^{kp})) \right\} \\ &= \max \left\{ 0, \max_{k; 1 \leq k \leq n} \left(t_n^{kp} - t + \sum_{l=n}^{k'-1} \sigma_l \right) \right\}, \end{aligned}$$

であること, 同様に

$$W(t) = \max \left\{ 0, \max_{k; 1 \leq k \leq n} \left(t_n - t + \sum_{l=n}^{k'-1} \sigma_l \right) \right\},$$

であることに注意すると, (3.10) より $W^{kp}(t) \leq W(t)$ が成立する. 時刻 t で客の到着がある場合も同様に成立する. \square

この補題より, 以下の定理が成り立つことが示される.

定理 3.4.5. M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルと K -priority モデルについて, サンプルパスごとに以下の式が成り立つ.

$$\tilde{N}_2(t) \leq \tilde{N}_2^{kp}(t).$$

証明. はじめに n 番目のタイプ 2 の客が到着した時刻を表す変数 $t_n^{(2)}$, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデル, K -priority モデルにおける時刻 t での workload を表す変数 $W(t), W^{kp}(t)$, K -priority モデルにおける時刻 t での未完了グループの構成人数を表す変数 $J^{kp}(t)$ を導入する.

$\tilde{N}_2(t), \tilde{N}_2^{kp}(t)$ が増加する可能性のあるタイミングは, タイプ 2 の客が到着したときに限られるので, $\tilde{N}_2(t) \leq \tilde{N}_2^{kp}(t)$ を証明するためには, $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) \leq \tilde{N}_2^{kp}(t_n^{(2)})$ が示せば十分であり, これを背理法を用いて示す. $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) \leq \tilde{N}_2^{kp}(t_n^{(2)})$ でないとすると, 初めて $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) > \tilde{N}_2^{kp}(t_n^{(2)})$ となる $n = k$ が存在することになる. 言い換えれば以下の式を満たす自然数 k が存在する.

$$\tilde{N}_2(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}_2^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) \quad , \quad \begin{cases} \tilde{N}_2(t_k^{(2)}) &= \tilde{N}_2(t_{k-1}^{(2)}) + 1 \\ \tilde{N}_2^{kp}(t_k^{(2)}) &= \tilde{N}_2^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) \end{cases} . \quad (3.11)$$

この式は時刻 $t_k^{(2)}$ において, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルではグルーピングが生じておらず, K -priority モデルではグルーピングが生じていることを表している. ここで, 時刻 $t_k^{(2)}$ において, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルではグルーピングが生じていないことに着目すると, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルについて, 以下の二つの場合のどちらかが成り立つ. 以降, それぞれの場合について考える.

Case1: 時刻 $t_{k-1}^{(2)}$ に到着したタイプ2の客はグルーピングが生じ、そのグループがちょうど G 人になった

Case2: 時刻 $t_{k-1}^{(2)}$ に到着したタイプ2の客は時刻 $t_k^{(2)}$ 以前に未完成グループのまま退去する

はじめに Case1 について考える. 条件より $J(t_{k-1}^{(2)}) = 0, J(t_{k-2}^{(2)}) = G - 1, \dots, J(t_{k-G}^{(2)}) = 1$ となるため, 以下の式が成り立つ.

$$\tilde{N}(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-1-j}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-G}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-G-1}^{(2)}) + 1 \quad (j = 1, \dots, G-1). \quad (3.12)$$

一方で, K -priority モデルにおいて, 時刻 $t_k^{(2)}$ に到着したタイプ2の客はグルーピングできていることから, $J^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) = m \leq G - 1$ と表すことができる. ただし, m は自然数である. すると, $J^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) = m, J^{kp}(t_{k-2}^{(2)}) = m - 1, \dots, J^{kp}(t_{k-m}^{(2)}) = 1$ となるため, 以下の式が成り立つ.

$$\tilde{N}^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}^{kp}(t_{k-m}^{(2)}) = \tilde{N}^{kp}(t_{k-m-1}^{(2)}) + 1. \quad (3.13)$$

よって, (3.11), (3.12), (3.13) より, $\tilde{N}(t_{k-m-1}^{(2)}) > \tilde{N}^{kp}(t_{k-m-1}^{(2)})$ となるが, これは $n = k$ で初めて $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) > \tilde{N}_2^{kp}(t_n^{(2)})$ となることに矛盾する. よって Case1 はあり得ないことが分かる.

次に Case2 について考える. $J(t_{k-1}^{(2)}) = l, J^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) = m$ とおく. ただし, l, m は自然数である. すると, $J(t_{k-1}^{(2)}) = l, J(t_{k-2}^{(2)}) = l - 1, \dots, J(t_{k-l}^{(2)}) = 1$ かつ $J^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) = m, J^{kp}(t_{k-2}^{(2)}) = m - 1, \dots, J^{kp}(t_{k-m}^{(2)}) = 1$ となるため, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t_{k-1}^{(2)}) &= \tilde{N}(t_{k-1-j}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-l}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-l-1}^{(2)}) + 1 \quad (j = 1, \dots, l-1), \\ \tilde{N}^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) &= \tilde{N}^{kp}(t_{k-1-j}^{(2)}) = \tilde{N}^{kp}(t_{k-m}^{(2)}) = \tilde{N}^{kp}(t_{k-m-1}^{(2)}) + 1 \quad (j = 1, \dots, m-1). \end{aligned}$$

$l > m$ のとき, $\tilde{N}(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-m-1}^{(2)}), \tilde{N}^{kp}(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}^{kp}(t_{k-m-1}^{(2)}) + 1$ となり, $\tilde{N}(t_{k-m-1}^{(2)}) > \tilde{N}^{kp}(t_{k-m-1}^{(2)})$ となるが, これは $n = k$ で初めて $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) > \tilde{N}_2^{kp}(t_n^{(2)})$ となることに矛盾する. $l \leq m$ のとき, $t_{k-l-1}^{(2)}$ に到着した客に着目すると, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルではこの客は行列の最後尾に加入することから, 補題 3.4.4 より, $W^{kp}(t_{k-l-1}^{(2)}) \leq W(t_{k-l-1}^{(2)})$ とあわせて考えると, $t_{k-l-1}^{(2)}$ に到着した客は K -priority モデルの方が M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルよりも先に退去することになる. しかし, $t_k^{(2)}$ では, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルにおいて $t_{k-l-1}^{(2)}$ に到着した客が存在せず, K -priority モデルにおいて, $t_{k-l-1}^{(2)}$ に到着した客が存在することと矛盾する. よって Case2 はあり得ないことが分かる. \square

3.4.5 M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルと Non-priority の比較

比較のために, 以下の補題を使用する.

補題 3.4.6. $W(t)$ および $W^{np}(t)$ を, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルおよび Non-priority モデルにおける時刻 t での workload とする. このとき $t_n^{(2)} \leq t$ を満たす全

ての n について

$$N_2^{np}(t_n^{(2)}) \leq N_2(t_n^{(2)}), \quad (3.14)$$

が成立し、かつ $N_2^{np}(t) = N_2(t)$ であるならば、 $W^{np}(t) \geq W(t)$.

証明. M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのもとで、到着時に未完成グループがないタイプ 2 の客の到着時刻列を $(\tilde{t}_1^{(2)}, \tilde{t}_2^{(2)}, \dots)$ とする. さらに、 $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots)$ (タイプ 1 の客の到着時刻列) と $(\tilde{t}_1^{(2)}, \tilde{t}_2^{(2)}, \dots)$ を一緒にして、昇順に番号を振りなおしたものを (t_1, t_2, \dots) とする. 当初の $G_1+G_2/GI/1$ キューは到着時刻列が (t_1, t_2, \dots) 、サービス時間列が $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ の $G/GI/1$ キューと等価である. 同様に、Non-priority モデルのもとで、到着時にペアリングが行われないタイプ 2 の客の到着時刻列とタイプ 1 の客の到着時刻列を一緒にして、昇順に番号を振りなおしたものを $(t_1^{np}, t_2^{np}, \dots)$ とする. (3.14) は $t_n \leq t < t_{n+1}$ かつ $t_n^{np} \leq t < t_{n+1}^{np}$ が満たされるならば

$$t_n \leq t_n^{np}, \quad (3.15)$$

であることと等価である. 時刻 t で客の到着がないならば、 $t_{l+1}^{np} \stackrel{\text{def}}{=} t$ とおくとリンドレーの方程式より、

$$\begin{aligned} W^{np}(t) &= \max \left\{ 0, \max_{k; 1 \leq k \leq n} \sum_{l=k}^n (\sigma_l - (t_{l+1}^{np} - t_l^{np})) \right\} \\ &= \max \left\{ 0, \max_{k; 1 \leq k \leq n} \left(t_n^{np} - t + \sum_{l=n}^{k-1} \sigma_l \right) \right\}, \end{aligned}$$

であること、同様に

$$W(t) = \max \left\{ 0, \max_{k; 1 \leq k \leq n} \left(t_n - t + \sum_{l=n}^{k-1} \sigma_l \right) \right\},$$

であることに注意すると、(3.15) より $W^{np}(t) \geq W(t)$ が成立する. 時刻 t で客の到着がある場合も同様に成立する. \square

この補題より、以下の定理が成り立つことが示される.

定理 3.4.7. M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルと Non-priority モデルについて、サンプルパスごとに以下の式が成り立つ.

$$\tilde{N}_2(t) \geq \tilde{N}_2^{np}(t).$$

証明. n 番目のタイプ 2 の客が到着した時刻を表す変数 $t_n^{(2)}$ 、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデル、Non-priority モデルにおける時刻 t での workload を表す変数 $W(t)$ 、 $W^{np}(t)$ 、Non-priority モデルにおける時刻 t での未完成グループの構成人数を表す変数 $J^{np}(t)$ を導入する.

$\tilde{N}_2(t)$ 、 $\tilde{N}_2^{np}(t)$ が増加する可能性のあるタイミングは、タイプ 2 の客が到着したときに限られるので、 $\tilde{N}_2(t) \geq \tilde{N}_2^{np}(t)$ を証明するためには、 $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) \geq \tilde{N}_2^{np}(t_n^{(2)})$ が示せば十分であり、これ

を背理法を用いて示す. $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) \geq \tilde{N}_2^{np}(t_n^{(2)})$ でないとすると, 初めて $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) < \tilde{N}_2^{np}(t_n^{(2)})$ となる $n = k$ が存在することになる. 言い換えれば以下の式を満たす自然数 k が存在する.

$$\tilde{N}_2(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}_2^{np}(t_{k-1}^{(2)}) \quad , \quad \begin{cases} \tilde{N}_2(t_k^{(2)}) &= \tilde{N}_2(t_{k-1}^{(2)}) \\ \tilde{N}_2^{np}(t_k^{(2)}) &= \tilde{N}_2^{np}(t_{k-1}^{(2)}) + 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

この式は時刻 $t_k^{(2)}$ において, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルではグルーピングが生じ, Non-priority モデルではグルーピングが生じていないことを表している. ここで, 時刻 $t_k^{(2)}$ において, Non-priority モデルではグルーピングが生じていないことに着目すると, Non-priority モデルについて, 以下の二つの場合のどちらかが成り立つ. 以降, それぞれの場合について考える.

Case1: 時刻 $t_{k-1}^{(2)}$ に到着したタイプ 2 の客はグルーピングが生じ, そのグループがちょうど G 人になった

Case2: 時刻 $t_{k-1}^{(2)}$ に到着したタイプ 2 の客は時刻 $t_k^{(2)}$ 以前に未完成グループのまま退去する

はじめに Case1 について考える. 条件より, $J^{np}(t_{k-1}^{(2)}) = 0, J^{np}(t_{k-2}^{(2)}) = G-1, \dots, J^{np}(t_{k-G}^{(2)}) = 1$ となるため, 以下の式が成り立つ.

$$\tilde{N}_2^{np}(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}_2^{np}(t_{k-1-j}^{(2)}) = \tilde{N}_2^{np}(t_{k-G}^{(2)}) = \tilde{N}_2^{np}(t_{k-G-1}^{(2)}) + 1 \quad (j = 1, \dots, G-1). \quad (3.17)$$

一方で, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルにおいて, 時刻 $t_k^{(2)}$ に到着したタイプ 2 の客はグルーピングできていることから, $J(t_{k-1}^{(2)}) = n \leq G-1$ と表すことができる. ただし, n は自然数である. すると, $J(t_{k-1}^{(2)}) = n, J(t_{k-2}^{(2)}) = n-1, \dots, J(t_{k-n}^{(2)}) = 1$ となるため, 以下の式が成り立つ.

$$\tilde{N}(t_{k-1}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-n}^{(2)}) = \tilde{N}(t_{k-n-1}^{(2)}) + 1. \quad (3.18)$$

よって, (3.16), (3.17), (3.18) より, $\tilde{N}(t_{k-n-1}^{(2)}) < \tilde{N}^{np}(t_{k-n-1}^{(2)})$ となるが, これは $n = k$ で初めて $\tilde{N}_2(t_n^{(2)}) < \tilde{N}_2^{np}(t_n^{(2)})$ となることに矛盾する. よって Case1 はあり得ないことが分かる.

次に Case2 について考える. 補題 3.4.6 より, $W^{np}(t_{k-1}^{(2)}) \geq W(t_{k-1}^{(2)})$ である. 一方, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルでは (時刻 $t_k^{(2)}$ でグルーピングが生じているため) $[t_{k-1}^{(2)}, t_k^{(2)}]$ 間は待ち行列は空にならない. 一方, Non-priority モデルでは未完成グループは行列の最後尾にいることから, 未完成グループが時刻 $t_k^{(2)}$ までに退去することは, 待ち行列が空になることを意味する. これは $W^{np}(t_{k-1}^{(2)}) \geq W(t_{k-1}^{(2)})$ であることと矛盾する. よって Case2 はあり得ないことが分かる. \square

3.4.6 M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの安定条件

(3.7), (3.8), 定理 3.4.5 より, サンプルパスごとに $\rho \leq \rho^{kp}$ となるため, K -priority モデルが安定状態であることは, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルが安定状態であることの十分条件となる. 一方で, (3.7), (3.8), 定理 3.4.7 より, サンプルパスごとに $\rho \geq \rho^{np}$

となるため、Non-priority モデルが安定状態であることは、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルが安定状態であることの必要条件となる。ここで、特に K -priority モデルにおいて $K \rightarrow \infty$ の極限を考えると、

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \rho^{kp} = \rho_1 + \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{G - (1 + \rho_2)^{-(K-1)} \sum_{j=1}^{G-1} \sum_{k=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1 + \rho_2} \right)^{k-1} \binom{K+k-3}{k-1}} = \rho_1 + \frac{\rho_2}{G},$$

となり、 K -priority モデルの安定条件と Non-priority モデルの安定条件が一致することにより、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルが安定状態であることの必要条件と十分条件が一致するため、 $\rho_1 + \rho_2/G < 1$ は M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルが安定状態であるための必要十分条件になる。

定理 3.4.8. 以下の式を満たすとき、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルは安定状態をとる。

$$\rho_1 + \frac{\rho_2}{G} < 1.$$

3.5 定常状態確率の数値計算法

本節では、3.3 節で定義した、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのような、レベル依存 QBD であるモデルの定常分布の制度保証付き近似解を、数値計算する方法について記載する。

3.5.1 数値計算アルゴリズム

はじめに、レベル $k+1$ の定常状態確率と k の定常状態確率を関係づける行列 Z_k を以下の式で定義する。

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k+1} Z_k. \quad (3.19)$$

以下の補題が示すように、 $\{Z_k\}$ は大域平衡方程式を変形し、漸化的に計算することで、ブロック行列 $Q_m^{(k)}$ を用いて表すことができる。

補題 3.5.1. $\{Z_k\}$ は以下で定まる。

$$\begin{aligned} Z_0 &= Q_{-1}^{(1)} \left(-Q_0^{(0)} \right)^{-1}, \\ Z_k &= Q_{-1}^{(k+1)} \left(-Q_0^{(k)} - Z_{k-1} Q_{+1}^{(k-1)} \right)^{-1}. \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

証明. q_0, \mathbf{q}_1 に関する大域平衡方程式を変形することで、 Z_0 を求めることができる。

$$q_0 Q_0^{(0)} + \mathbf{q}_1 Q_{-1}^{(1)} = 0 \Leftrightarrow q_0 Q_0^{(0)} = -\mathbf{q}_1 Q_{-1}^{(1)} \Leftrightarrow q_0 = \mathbf{q}_1 Q_{-1}^{(1)} \left(-Q_0^{(0)} \right)^{-1},$$

$$q_0 = \mathbf{q}_1 Q_{-1}^{(1)} \left(-Q_0^{(0)} \right)^{-1} = \mathbf{q}_1 Z_0 \Leftrightarrow Z_0 = Q_{-1}^{(1)} \left(-Q_0^{(0)} \right)^{-1}.$$

また, $\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}$ に関する大域平衡方程式を変形し, $\mathbf{q}_{k-1} = \mathbf{q}_k Z_{k-1}$ を代入することで, $Z_k (k = 1, 2, \dots)$ を求めることができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{k-1} Q_{+1}^{(k-1)} + \mathbf{q}_k Q_0^{(k)} + \mathbf{q}_{k+1} Q_{-1}^{(k+1)} = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{q}_k Z_{k-1} Q_{+1}^{(k-1)} + \mathbf{q}_k Q_0^{(k)} = -\mathbf{q}_{k+1} Q_{-1}^{(k+1)} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{q}_k \left(Q_0^{(k)} + Z_{k-1} Q_{+1}^{(k-1)} \right) = -\mathbf{q}_{k+1} Q_{-1}^{(k+1)} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k+1} Q_{-1}^{(k+1)} \left(-Q_0^{(k)} - Z_{k-1} Q_{+1}^{(k-1)} \right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k+1} Z_k. \end{aligned}$$

□

式 (3.19) より, ある定数 N と N 以下のレベル k に対して, 以下の式が成り立つ.

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k+1} Z_k = \mathbf{q}_{k+2} Z_{k+1} Z_k = \dots = \mathbf{q}_N Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_k. \quad (3.20)$$

よってあるレベル N において, そのレベルの定常状態確率ベクトル \mathbf{q}_N の向き $\tilde{\mathbf{q}}_N \stackrel{\text{def}}{=} c\mathbf{q}_N$ (定数 c は未知で良い) が求めれば, N 以下のレベルで正規化した定常状態確率 $(\bar{\mathbf{q}}_0(N), \bar{\mathbf{q}}_1(N), \dots, \bar{\mathbf{q}}_N(N))$ を以下の式で計算できる.

$$\bar{\mathbf{q}}_k(N) = \frac{\mathbf{q}_k}{\sum_{l=0}^N \mathbf{q}_l \mathbf{1}^\top} = \frac{\mathbf{q}_N Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_k}{\sum_{l=0}^N \mathbf{q}_N Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_l \mathbf{1}^\top} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_N Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_k}{\sum_{l=0}^N \tilde{\mathbf{q}}_N Z_{N-1} Z_{N-2} \dots Z_l \mathbf{1}^\top}. \quad (3.21)$$

式 (3.21) より, $\bar{\mathbf{q}}_k(N)$ を求める際には, $\tilde{\mathbf{q}}_N$ をどれだけの精度で計算できるかが鍵となる. 本論文では, $\tilde{\mathbf{q}}_N$ の精度保証付きの近似解を, 文献 [6, 8, 11] に倣って 3.5.2 節で導出する. また, レベル N は大きければ大きいほど $\bar{\mathbf{q}}_k(N)$ の分母である $\sum_{l=0}^N \mathbf{q}_l \mathbf{1}^\top$ が限りなく 1 に近づき, $\bar{\mathbf{q}}_k(N) \approx \mathbf{q}_k$ とみなせるようになるが, N の大きさと計算にかかる時間はトレードオフの関係になっているため, 一概に N を大きくとれない. そこで, 本論文では N をヒューリスティックに定める方法を 3.5.3 節で議論する.

3.5.2 $\tilde{\mathbf{q}}_N$ の定め方

3.5.1 節で説明したように, \mathbf{q}_N の向きさえ定まれば良いことから, 本節では $\bar{\mathbf{q}}_N \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{q}_N / (\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ に着目し, 文献 [6] の手法を用いて $\bar{\mathbf{q}}_N$ の精度保証付き近似解を求める方法を示す. $\bar{\mathbf{q}}_N$ は, そのまま ($\tilde{\mathbf{q}}_N$) として (3.21) に代入し, $\bar{\mathbf{q}}_k(N)$ の計算に用いることができる. なお, 精度保証とは, 近似解と厳密解の相対誤差 $\|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{q}}_N\|$ が任意の正数 ε 以下であることが保証されることを指す.

$U_{k,N} \stackrel{\text{def}}{=} Z_k Z_{k-1} \dots Z_N$ の i 番目の行ベクトルを $\mathbf{u}_{k,N}(i)$ と表す ($k > N$). また, $\mathbf{u}_{k,N}(i)$ を正規化したベクトルを $\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) = \mathbf{u}_{k,N}(i) / (\mathbf{u}_{k,N}(i) \mathbf{1}^\top)$ で表現する. $\tilde{\mathbf{q}}_N$ を求めるにあたって, 文献 [6] で導かれている以下の定理, 系を用いる (文献 [6] の Lemma2.1, Theorem2.1 を引用).

定理 3.5.2. レベル依存する G/G/1 型連続時間マルコフ連鎖において, 以下の関係が成立する.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{u}}_{k,N}(1) = \bar{\mathbf{q}}_N.$$

なお, 既約で正再帰的なレベル依存する G/G/1 型連続時間マルコフ連鎖において, 任意の k, N の組 ($k = 1, 2, \dots, N = 0, 1, \dots, k-1$) に対して $\mathbf{u}_{k,N}(i) \mathbf{1}^\top > 0$ を満たす i が少なくとも一つは存在し, そのうちの一つをラベルの付け替えをして $i = 1$ とする.

系 3.5.3. レベル依存する G/G/1 型連続時間マルコフ連鎖において, 任意の非負整数 n と任意の正数 ε に対して, ある自然数 $K \stackrel{\text{def}}{=} K(n, \varepsilon)$ が存在し, すべての自然数 $k = K, K+1, \dots$ に対して以下の式が成立する.

$$\|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{q}}_N\| < \varepsilon \text{ if } \mathbf{u}_{k,N}(i)\mathbf{1}^\top > 0. \quad (i = 1, 2, \dots, M_k)$$

$\bar{\mathbf{q}}_N$ の近似解 $\bar{\mathbf{u}}$ の導出にあたっては, 系 3.5.3 を用いる. 具体的には, 3.5.3 節で定めた $N = N'$ と予め定めておいた任意の正数 ε を用いて, ある自然数 $K = K(N', \varepsilon)$ を以下のように繰り返し計算により求める.

STEP1 $k = N + 1, U_{k,N} = I$ を初期値とする.

STEP2 $U_{k,N} = Z_{k-1}U_{k-1,N}$ として, 近似解の候補 $\bar{\mathbf{u}}$ を $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{1}U_{k,N}/\mathbf{1}U_{k,N}\mathbf{1}^\top$ により定める.

STEP3 $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{u}}\|$ を求める.

STEP4 $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{u}}\| > \varepsilon$ なら, $K = k$ は不適とし, $k = k + 1$ として STEP2 に戻る.

STEP5 $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{u}}\| \leq \varepsilon$ なら, $K = k$ が定まり, $\bar{\mathbf{u}}$ が $\bar{\mathbf{q}}_N$ の精度保証付き近似解となる.

なお, STEP2, STEP3 で登場するパラメータはそれぞれ $U = U_{k,N}, \bar{\mathbf{u}}(i) = \bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i)$ であることに注意する.

3.5.3 N の定め方

本節では, サービスシェアリングのあるモデルのレベル 0 の状態数が 1 つであることを用いて, ヒューリスティックに N を定める方法について議論していく. 式 (3.20) を $k = 0, N = k$ と置き換えることで, レベル 0 とレベル k の定常状態確率 q_0, \mathbf{q}_k に関する式は, 以下のように書ける.

$$q_0 = \mathbf{q}_k Z_{k-1} Z_{k-2} \dots Z_0 = \mathbf{q}_k U_{k-1,0}, \quad U_{k-1,0} \stackrel{\text{def}}{=} Z_{k-1} Z_{k-2} \dots Z_0.$$

補題 3.5.1 と, ブロック行列 $Q_m^{(k)}$ のサイズが $M_k \times M_{k+m}$ であることから, Z_k のサイズは $M_{k+1} \times M_k$ となり, $M_0 = 1$ より, $U_{k-1,0}$ は $M_{k+1} \times 1$ の行列 (言い換えると縦ベクトル) である. よって, $U_{k-1,0}$ の最小要素を u_{k-1}^{\min} , $U_{k-1,0}$ の最大要素を u_{k-1}^{\max} とおくことで, 以下の関係式が成り立つ.

$$u_{k-1}^{\max} \mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top \geq \mathbf{q}_k U_{k-1,0} = q_0 \geq u_{k-1}^{\min} \mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top.$$

したがって $u_{k-1}^{\min} > 0$ であれば

$$\frac{1}{u_{k-1}^{\min}} \geq \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{1}^\top}{q_0} = \frac{\bar{\mathbf{q}}_k(N) \mathbf{1}^\top}{\bar{q}_0(N)} \geq \frac{1}{u_{k-1}^{\max}}. \quad (3.22)$$

と書くことができる. ここで, 上式の $\mathbf{q}_k \mathbf{1}^\top / q_0$ はレベル 0 の定常状態確率 (q_0) とレベル k の定常状態確率 ($\mathbf{q}_k \mathbf{1}^\top$) の比を表している. 式 (3.22) と, 有限な自然数 N に対して, $\sum_{k=0}^N \mathbf{q}_k \mathbf{1}^\top < 1$ となることを用いて, $\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top$ を以下のように評価する.

$$\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top < \frac{\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top}{\sum_{k=0}^N \mathbf{q}_k \mathbf{1}^\top} = \frac{\frac{\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top}{q_0}}{1 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\mathbf{q}_k \mathbf{1}^\top}{q_0} \right)} \leq \frac{1}{u_{N-1}^{\min} \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{u_{k-1}^{\max}} \right)}. \quad (3.23)$$

以降, $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top) \stackrel{\text{def}}{=} 1/u_{N-1}^{\min} \left(1 + \sum_{k=1}^N (1/u_{k-1}^{\max})\right)$ とする. 閾値 (例えば 10^{-10} など) を予め決めておき, 式 (3.23) を用いて, $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ が初めて閾値より小さくなる $N = N'$ を求めることで, N をヒューリスティックに定めることができる.

3.6 M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのシミュレーション

本節では, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのシミュレーションの実行方法を示す. M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのシミュレーションは, 2.2.10 節で示した, M/M/1 モデルの待ち行列シミュレーションを, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデル仕様に変更することで実現させる.

M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルでは, 客のタイプが2種類存在し, 更に, タイプ2の客について, 待ち行列システム到着時に, 未完成グループに加入できた客と, 加入できなかった客の2種類に分類することができる. よって, M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルでは, タイプ1の客, 待ち行列システム到着時に, 未完成グループへの合流ができなかったタイプ2の客, 待ち行列システム到着時に, 未完成グループへの合流ができたタイプ2の客, 以上3種類の客それぞれの平均滞在時間 $E[S^1], E[S^{2t}], E[S^{2j}]$ を求めるものとする.

はじめに, 3種類の客それぞれの平均滞在時間 $E[S^1], E[S^{2t}], E[S^{2j}]$, 平均系内客数 $E[L]$ が以下の式で求まることを示す. ただし, 3種類の客それぞれに対して, 時刻0以降にはじめて到着する客を0番目の客とし, その種類の客の中で n 番目に到着した客の到着時刻をそれぞれ $T_n^1, T_n^{2t}, T_n^{2j}$ とする ($T_{-1}^1 < 0 \leq T_0^1, T_{-1}^{2t} < 0 \leq T_0^{2t}, T_{-1}^{2j} < 0 \leq T_0^{2j}$). また, 時刻0から時刻 T の間に待ち行列システムに到着するその種類の客の数をそれぞれ, N^1, N^{2t}, N^{2j} とする. さらに, 3種類の客それぞれに対して, その種類の客の中で n 番目に到着した客の滞在時間をそれぞれ $S_n^1, S_n^{2t}, S_n^{2j}$ とする. なお, $L(0) = 0$ とする.

$$E[S^1] = \frac{1}{N^1} \sum_{n=0}^{N^1-1} S_n^1, \quad E[S^{2t}] = \frac{1}{N^{2t}} \sum_{n=0}^{N^{2t}-1} S_n^{2t}, \quad E[S^{2j}] = \frac{1}{N^{2j}} \sum_{n=0}^{N^{2j}-1} S_n^{2j},$$

$$E[L] = \frac{1}{T} \left(\sum_{n=0}^{N^1-1} S_n^1 + \sum_{n=0}^{N^{2t}-1} S_n^{2t} \right). \quad (3.24)$$

ここで, 平均系内客数 $E[L]$ を求める式において, 待ち行列システム到着時に未完成グループへの合流ができたタイプ2の客の滞在時間 S_n^{2j} を用いないのは, 待ち行列システム到着時に未完成グループへの合流ができたタイプ2の客は, 待ち行列システム到着時に, 未完成グループに吸収され, 系内客数には影響を与えないためである.

次に, 3種類の客それぞれの滞在時間 $S_n^1, S_n^{2t}, S_n^{2j}$ の求め方を記す. はじめに, タイプ1の客, タイプ2の客それぞれに対して, M/M/1 モデルをシミュレーションしたときと同様に, パラメータが λ_1, λ_2 である指数分布に従って到着時刻列 $\{T_n^1\}, \{T_n^2\}$ を与える. ただし, タイプ2の客のうち, 時刻0以降にはじめて到着する客を0番目の客とし, タイプ2の客の中で n 番目に到着した客の到着時刻を T_n^2 とする ($T_{-1}^2 < 0 \leq T_0^2$). 次に, 各タイプの客の到着時刻列 $\{T_n^1\}, \{T_n^2\}$ をひと

まとめにし、0 から小さい順に並び替えて、ラベルを付けなおした、客全体の到着時刻列 $\{T_n\}$ を生成する。また、客全体の到着時刻列 $\{T_n\}$ 生成時に、 n 番目の客のタイプを記憶するため、客のタイプを表す変数 $type_n$ を与える。客全体の到着時刻列 $\{T_n\}$ 生成時には、客のタイプが1の場合は $type_n = -1$ 、客のタイプが2の場合は $type_n = -2$ を与える。

客全体の到着時刻列 $\{T_n\}$ 生成後は、次のステップを繰り返す行いうことで、逐次的に $\{W_n\}, \{\sigma_n\}$ を生成する。ただし、初期値としてパラメータ $1/\mu$ の指数分布に従う乱数によって σ_0 を与え、さらに $W_0 = 0$ とする。また、一番最後に待ち行列の最後尾に1人で加入した客の番号を表す r 、未完成グループの先頭客の番号を表す q 、未完成グループの構成人数を表すパラメータ q_{num} を定義する。なお、待ち行列システム内に未完成グループが存在しない場合は、 $q = -1, q_{num} = 0$ をとる。また、 $r = 0$ で初期化し、 $type_0 = -1$ であれば、 $q = -1, q_{num} = 0$ で、 $type_0 = -2$ であれば、 $q = 0, q_{num} = 1$ で初期化する。

はじめに、現在着目している客 $n = p$ の到着時刻 T_p に、既に存在していた未完成グループが、待ち行列から退去したか否かを判断する。したがって、 $q = -1$ の場合は、到着時刻 T_p に未完成グループが存在しないことは既に確定しているので、このステップでは操作を行わずに次のステップへと移行する。 $q \neq -1$ の場合は、時刻 T_p 以前に未完成グループが待ち行列から退去したか否かを確認するために以下の式を用いて、 q, q_{num} を更新する。

$$q = \begin{cases} q & (T_q + W_q + \sigma_q > T_p) \\ -1 & (T_q + W_q + \sigma_q \leq T_p) \end{cases}, \quad (3.25)$$

$$q_{sum} = \begin{cases} q_{sum} & (T_q + W_q + \sigma_q > T_p) \\ 0 & (T_q + W_q + \sigma_q \leq T_p) \end{cases}. \quad (3.26)$$

次に、現在着目している客 $n = p$ に W_p, σ_p を与える操作を行う。本ステップは p 番目の客のタイプ $type_p$ によって、操作が異なる。 $type_p = -1$ の場合、 p 番目の客の到着時刻 T_p において、待ち行列が空であるか否かを、客 $n = p$ の到着時刻 T_p と、一番最後に待ち行列の最後尾に1人で加入した客 $n = r$ の離脱時刻 $T_r + W_r + \sigma_r$ を比較することで判断し、以下の式を用いて、 W_p を与える。

$$W_p = \begin{cases} T_r + W_r + \sigma_r - T_p & (T_r + W_r + \sigma_r > T_p) \\ 0 & (T_r + W_r + \sigma_r \leq T_p) \end{cases}.$$

このとき、いずれにせよ p 番目の客が待ち行列の最後尾に加入し、サービス時間は他の客に依存しないため、 σ_p をパラメータ μ の指数分布に従う乱数 $f(\mu)$ により与え、 $r = p$ に更新する。

p 番目の客のタイプ $type_p = -2$ の場合、はじめに p 番目の客の到着時刻 T_p において、待ち行列が空であるか否かを、客 $n = p$ の到着時刻 T_p と、一番最後に待ち行列の最後尾に1人で加入した客 $n = r$ の離脱時刻 $T_r + W_r + \sigma_r$ を比較することで判断し、待ち行列が空である場合(すなわち $T_r + W_r + \sigma_r \leq T_p$ の場合)のみ、 $W_p = 0, \sigma_p = f(\mu)$ を与え、 $r = p, q = p, q_{num} = 1$ に更新する。次に、 $T_r + W_r + \sigma_r > T_p$ であった場合は、 q_{num} の値によって場合分けをして、以下のパラメータをそれぞれ与える。

$$W_p = \begin{cases} T_r + W_r + \sigma_r - T_p & (q_{num} = 0) \\ \max(T_q + W_q - T_p, 0) & (1 \leq q_{num} \leq G - 1) \end{cases}, \quad (3.27)$$

$$\sigma_p = \begin{cases} f(\mu) & (q_{num} = 0) \\ \min(T_q + W_q + \sigma_q - T_p, \sigma_q) & (1 \leq q_{num} \leq G - 1) \end{cases}. \quad (3.28)$$

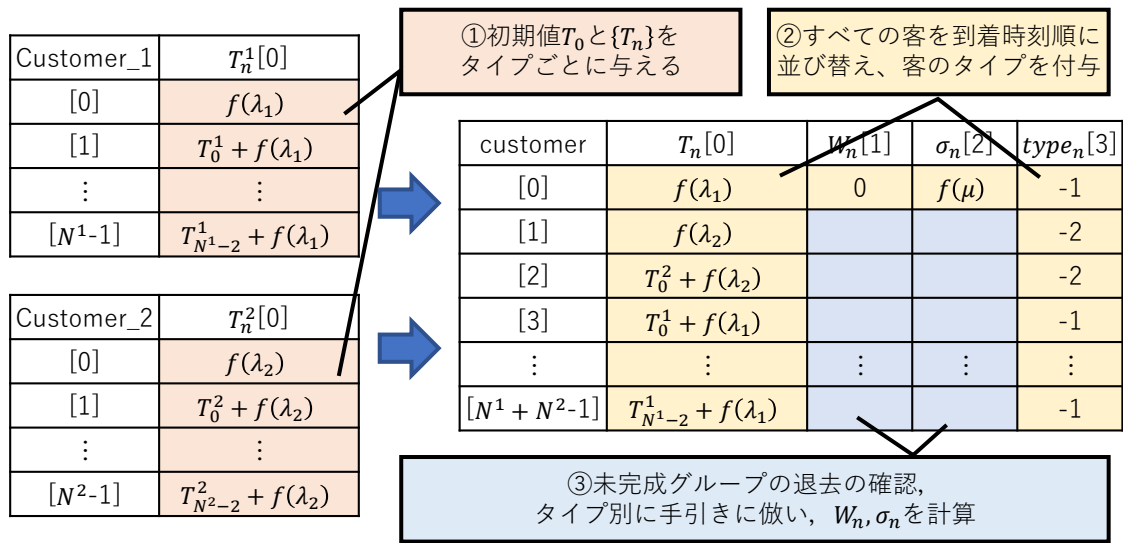


図 3.3: 配列操作イメージ図

このとき、 q_{num} の値により以下のようにパラメータが更新される。 $q_{num} = 0$ のとき、 p 番目の客は 1 人で最後尾に加入し、新たな未完成グループを生成することから、 $r = p, q = p, q_{num} = 1$ に更新する。 $1 \leq q_{num} \leq G - 2$ のとき、 p 番目の客は q 番目の客が先頭客である未完成グループに加入するため、 $type_p = q, q_{num} = q_{num} + 1$ に更新する。 $q_{num} = G - 1$ のとき、 p 番目の客は q 番目の客が先頭客である未完成グループに加入し、 q 番目の客が先頭客である未完成グループは最大構成人数である G 人に達し、未完成グループではなくなることから、 $type_p = q, q = -1, q_{num} = 0$ に更新する。

以上の操作を行うことで、3 種類の客それぞれの滞在時間 $S_n^1, S_n^{2t}, S_n^{2j}$ が求まる。また、 $type_n = -1, -2, else$ を数え上げることで、 T, N^1, N^{2t}, N^{2j} が求まる。本節で説明したシミュレーションのアルゴリズムを簡潔に書くと以下ようになる。配列に格納するイメージ図 3.3 も用意したので併せて確認されたい。

- STEP1 初期値 T を定め、パラメータ λ_1, λ_2 の指数分布に従う乱数 $f(\lambda_1), f(\lambda_2)$ を用いて $\{T_n^1\}, \{T_n^2\}$ を与える
- STEP2 $\{T_n^1\}, \{T_n^2\}$ を時系列順に並び替えた $\{T_n\}$ を生成し、 n 番目の客のタイプを表す $type_n$ を付与する
- STEP3 $n = 1, 2, \dots, N^1 + N^2 - 1$ の範囲で STEP3-1, 3-2 を繰り返し、 $\{W_n\}, \{\sigma_n\}, \{type_n\}$ を計算する
- STEP3-1 未完成グループの退去の確認
- STEP3-2 タイプ別に、 W_n, σ_n を計算
- STEP4 $T, N^1, N^{2t}, N^{2j}, \{S_n\}$ を元に、式 (2.1), (3.24) を用いて $E[S^1], E[S^{2t}], E[S^{2j}], E[L]$ を求める

注 3.6.1. サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合は、式 (3.25),

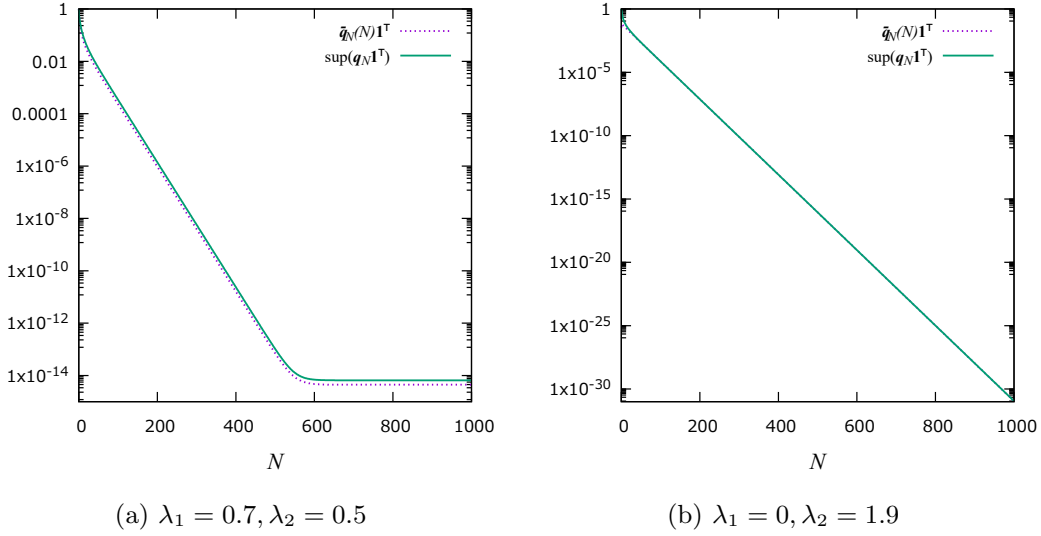


図 3.4: $\bar{q}_N(N)\mathbf{1}^\top$ と $\sup(q_N\mathbf{1}^\top)$ の比較

(3.26),(3.27),(3.28) 参照が以下の式にそれぞれ変更される.

$$\begin{aligned}
 q &= \begin{cases} q & (T_q + W_q > T_q) \\ -1 & (T_q + W_q \leq T_q) \end{cases}, \\
 q_{sum} &= \begin{cases} q_{sum} & (T_q + W_q > T_q) \\ 0 & (T_q + W_q \leq T_q) \end{cases}, \\
 W_p &= \begin{cases} T_r + W_r + \sigma_r - T_p & (q_{num} = 0) \\ T_q + W_q - T_p, & (1 \leq q_{num} \leq G - 1) \end{cases}, \\
 \sigma_p &= \begin{cases} f(\mu) & (q_{num} = 0) \\ \sigma_q & (1 \leq q_{num} \leq G - 1) \end{cases}.
 \end{aligned}$$

また、サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合は、パラメータの更新に関しても変更点が生じる。 $type_p = -2$ かつ p 番目の客が到着時に待ち行列が空である場合、 q, q_{sum} の更新は行われなくなる。

3.7 数値計算例

本節では、3.5 節で説明した数値計算アルゴリズムを用いて、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの数値計算を行った結果を説明する。なお、本節では、サービス窓口が存在する未完成グループへの加入を許す場合を主軸に議論を進めるが、数値計算結果とシミュレーション結果の比較に限り、サービス窓口が存在する未完成グループへの加入を許さない場合についても、数値計算結果の妥当性を示す。

3.7.1 数値計算結果とシミュレーション実行結果の比較

本小節では、3.5 節で説明した数値計算アルゴリズムを用いて得られる平均待ち行列長と、3.6 節で説明したシミュレーションを実行して得られる平均待ち行列長の比較を行い、数値計算結果の妥

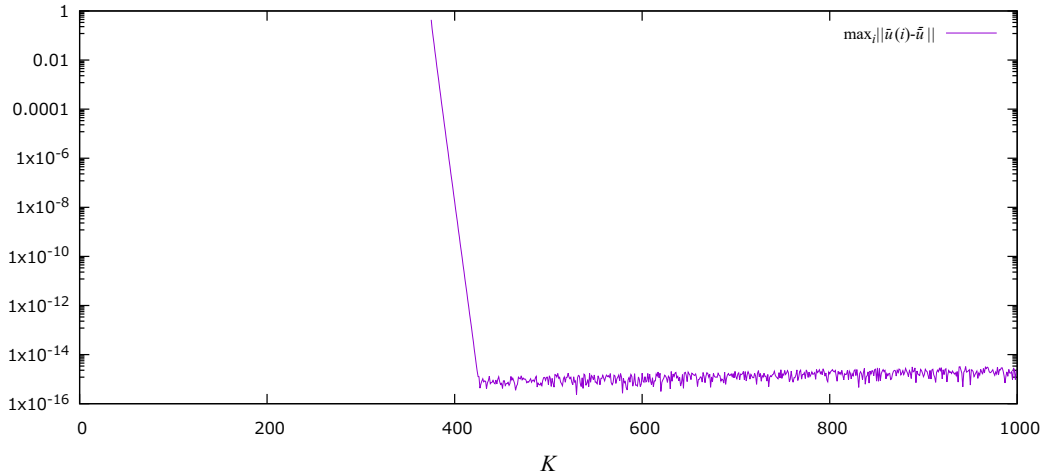


図 3.5: $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}(i) - \bar{\mathbf{u}}\|$ の変化 ($K = 374$ から $K = 1000$ まで計算)

当性を示す。数値計算，シミュレーションに用いるパラメータについては，3.2 節で示した安定条件 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ に収まるように， $\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.5, \mu = 1, G_2 = 2$ とする。

最初に，3.5.3 小節の手法を用いて， N の設定値を評価した。具体的には， $N = 0, 1, \dots, 1000$ の範囲で $\{Z_k\}_{k=0}^{N-1}, \{U_{k,0}\}_{k=0}^{N-1}$ を計算し， $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ を算出した。計算結果を図 3.4a に示す。計算の結果， $N = 374$ で初めて $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top) < 1.0 \times 10^{-10}$ を満たすことが確認できたため，本論文では， $N = 374$ とした。

次に，3.5.2 小節の手法を用いて， $\tilde{\mathbf{q}}_N$ を評価した。その際，誤差精度は $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-15}$ とした。その結果， $K = 427$ ではじめて $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{u}}\| \leq 1.0 \times 10^{-15}$ を満たした。よって，本論文では， $\tilde{\mathbf{q}}_N = \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{1}U_{427,374}/\mathbf{1}U_{427,374}\mathbf{1}^\top$ とした。なお，参考までに， $K = 427$ で計算を打ち切らずに $K = 1000$ まで $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{u}}\|$ を計算した結果を図 3.5 に示す。図 3.5 は， $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{u}}\|$ が， 1.0×10^{-15} までは一気に減少し，それ以降は 1.0×10^{-16} に達さないことを示している。

最後に， $N = 374, K = 427$ として系内客数分布を算出し，平均待ち行列長 $E[L] = 18.40$ という結果を得た。一方で，3.6 節で示した，M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルを模したシミュレータを用いて，同じ条件下 $\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.5, \mu = 1, G = 2$ で，1 回あたり時間 500000 のシミュレーションを 20 回実行したところ，平均待ち行列長 $E[L] = 18.36$ という結果が得られた。この数値結果は，シミュレーションの実行結果に対する，数値計算結果の相対誤差が 0.22% であることから，数値計算結果はおおむね妥当であると判断できる。

また，サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合についても，同様に 3.5 章で説明した数値計算アルゴリズムを用いて平均待ち行列長を求めた。結果として， $N = 375$ で初めて $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top) < 1.0 \times 10^{-10}$ を満たし， $K = 428$ ではじめて $\max_i \|\bar{\mathbf{u}}_{k,N}(i) - \bar{\mathbf{u}}\| \leq 1.0 \times 10^{-15}$ を満たした。 $N = 375, K = 428$ として系内客数分布を算出し，平均待ち行列長 $E[L] = 18.84$ という結果を得た。同様に，サービス窓口に存在する未完成グループへの加入を許さない場合についてもシミュレーション評価を行ったところ，平均待ち行列長 $E[L] = 18.57$ という結果が得られ，シミュレーションの実行結果に対する，数値計算結果の相対誤差が 1.45% であることから，数値計算結果はやはり妥当であると判断できる。

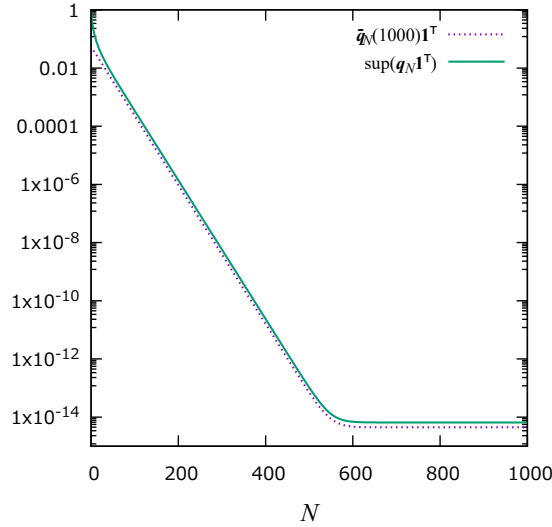


図 3.6: $\bar{q}_N(1000)\mathbf{1}^\top$ と $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ の比較 ($\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.5$)

3.7.2 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ について

本小節では、3.7.1 小節の計算結果を用いて、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ について説明を行う。まず、 N を動かしたときの $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ の減少のしかたについて説明を行う。図 3.4a では、 $N = 600$ 以降において $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ が一定値に留まり、指数関数的に減少していないが、 λ_1, λ_2 の値によっては $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ が引き続き指数関数的に減少するケースも見受けられる。図 3.4b がその例である。図 3.4b では $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.9$ としている。図 3.4b のように、 $\lambda_1 = 0$ となるケースでは、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ が $N = 600$ 以降でも指数関数的に減少している。このことから、 $\lambda_1 \neq 0$ のケースでは、 $Q_{+1}^{(l)}$ 内のパラメータ数が増加し、 $\{Z_k\}$ を求める際の逆行列演算が精度よく演算されないことが、図 3.4a の $N = 600$ 以降において、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ が一定値に留まることの原因ではないかと考えられる。

次に、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ と $\bar{q}_N(N)\mathbf{1}^\top$ ないし $\bar{q}_N(1000)\mathbf{1}^\top$ の関係性について説明を行う。式 (3.23) は、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ が系内客数分布 (系内客数が N の確率: $\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top$) の上限として利用できることを示している。また、図 3.4a および図 3.4b は、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ とともに、 $\bar{q}_N(N)\mathbf{1}^\top$ についても結果を記載している。図 3.4a および図 3.4b から分かるように、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ は $\bar{q}_N(N)\mathbf{1}^\top \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top / \left(\sum_{l=0}^N q_l\mathbf{1}^\top \right)$ に対して、タイトな上限を与えていることが分かる。さらに、参考までに、 N を十分大きくとり ($N = 1000$)、系内客数分布 $\{\bar{q}_N(1000)\mathbf{1}^\top\}_{N=1}^{1000}$ を (本論文の数値計算アルゴリズムにより) 評価し、その結果を図 3.6 に示した。図 3.6 より、 $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ は $\bar{q}_N(1000)\mathbf{1}^\top$ に対しても、タイトな上限を与えており、系内客数分布の簡易な評価には $\sup(\mathbf{q}_N\mathbf{1}^\top)$ が利用できる可能性があると示された。

3.7.3 M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの特徴

本小節では、3.2 節で示した安定条件 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ と、3.5 節で説明した数値計算アルゴリズムを用いて、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの平均待ち行列長 $E[L]$ を計算し、M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの特徴について説明

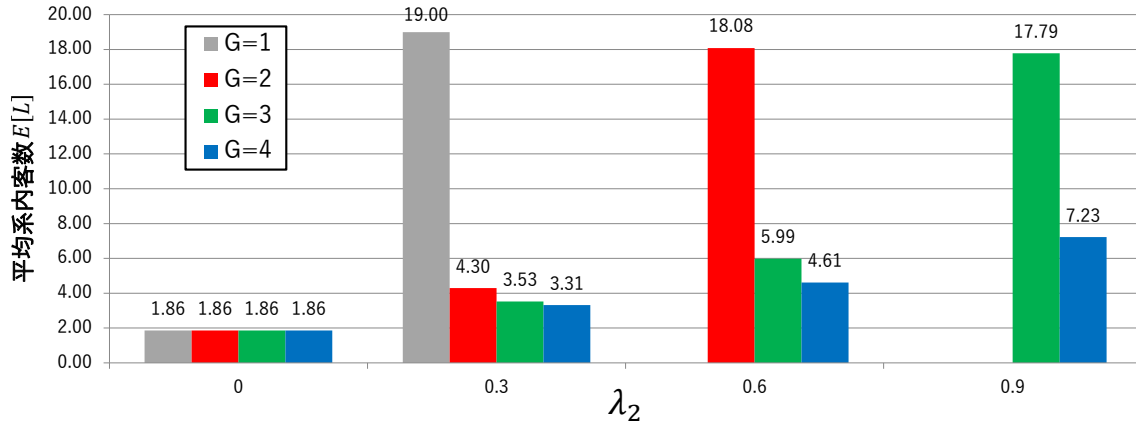


図 3.7: 数値計算結果による平均系内客数 $E[L]$ の比較

を行う。M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルの特徴を説明するにあたり、数値計算に用いるパラメータは、 $\lambda_1 = 0.65, \mu = 1.0$ とした。また、 λ_2 については、 λ_2 の値を $\lambda_2 = 0, 0.3, 0.6, 0.9$ の場合の 4 通りについて計算を行った。 G についても、 $G = 1, 2, 3, 4$ の場合の 4 通りについて計算を行った。なお、数値計算に用いるパラメータ $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-10}$ とし、 N を定める際に用いる閾値に関しても 1.0×10^{-10} とした。以上のパラメータに従う M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルに対して、数値計算を行った結果が図 3.7 である。ただし、 $(G, \lambda_2) = (1, 0.6), (1, 0.9), (2, 0.9)$ の 3 つの場合に関しては、それぞれ安定条件 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ を満たさないため、数値計算を行っていない。また、 $G = 1$ や $\lambda_2 = 0$ の場合には、数値計算をしておらず、 $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ とし、普通の M/M/1 モデルとして、 $E[L] = \rho / (1 - \rho)$ を用いて平均待ち行列長 $E[L]$ を計算した。

はじめに、 $\lambda_2 = 0.6$ のケースに着目すると、 $G = 1$ の場合は、 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k = 0.65 + 0.6 = 1.25 \geq 1$ となり、待ち行列長が無限に発散してしまう。一方で、 $G = 2$ の場合は、 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k = 0.65 + 0.6/2 = 0.95 < 1$ となり、待ち行列システムは安定状態をとり、平均待ち行列長 $E[L] = 18.08$ が得られる。このように、サービスシェアリングを考慮しないときに、待ち行列システムが不安定になってしまう場合に対して、サービスシェアリングの概念を導入することで、待ち行列長が無限に発散することなく、待ち行列システムを安定状態にすることができることが、サービスシェアリングのあるモデルの強みであることが分かる。

次に、 $\lambda_2 = 0.9$ のケースに着目すると、 $G = 1$ の場合に限らず、 $G = 2$ の場合においても、 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k = 0.65 + 0.9/2 = 1.1 \geq 1$ となり、待ち行列長が無限に発散してしまう。今回のケースでは、 $G = 3$ の場合、 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k = 0.65 + 0.9/3 = 0.95 < 1$ となり、待ち行列システムは安定状態をとり、平均待ち行列長 $E[L] = 17.79$ が得られる。このように、サービスシェアリングのあるモデルでは、 G の値によっては待ち行列システムが不安定になってしまう場合でも、 G の値を安定条件 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ を満たすようにより大きくとることで、待ち行列システムを安定状態にすることができることが、サービスシェアリングのあるモデルの強みであることが分かる。

最後に、 $\lambda_2 = 0.3$ のケースに着目すると、 $G = 1$ においても、 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k = 0.65 + 0.3 = 0.95 < 1$ となり、サービスシェアリングの概念を導入せずとも、待ち行列システムが安定状態をとり、平均待ち行列長 $E[L] = 19.00$ が得られる。 $G = 1$ で安定状態をとることから、勿論 $G = 2$ で

も待ち行列システムは安定状態をとり、平均待ち行列長 $E[L] = 4.30$ が得られる。 $G = 2$ のときの平均待ち行列長 $E[L] = 4.30$ は、 $G = 1$ のときの平均待ち行列長 $E[L] = 19.00$ と比較して、実に 77.4% 小さな値になっている。このように、サービスシェアリングの概念を導入せずとも、安定状態をとるケースにおいても、サービスシェアリングの概念を取り入れることで、平均待ち行列長の大幅な減少を達成することができる点も、サービスシェアリングのあるモデルの強みであることが分かる。一方で、 $G = 3$ でも待ち行列システムは安定状態をとり、平均待ち行列長 $E[L] = 3.53$ が得られるが、 $G = 1$ のときの平均待ち行列長 $E[L] = 19.00$ と比較すると、81.4% 小さな値になっている。同様に、 $G = 4$ でも待ち行列システムは安定状態をとり、平均待ち行列長 $E[L] = 3.31$ が得られるが、 $G = 1$ のときの平均待ち行列長 $E[L] = 19.00$ と比較すると、82.6% 小さな値になっている。このように、サービスシェアリングのあるモデルは、やみくもに G を大きくしても、平均待ち行列長 $E[L]$ が劇的に減少しないことが分かった。

図 3.7 で得られた結果を用いた以上の議論により、サービスシェアリングのあるモデルの運用方法を考えることができる。はじめに、安定条件の判別式 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ を満たすような $G = G'$ を探す。次に、 $G = G'$ の下で数値計算を行い、平均待ち行列長 $E[L]$ を導出する。このとき得られる平均待ち行列長 $E[L]$ が、事前に設定した閾値を上回る場合には、 $G = G' + 1$ として、再度計算をやり直し、事前に設定した閾値未滿となる平均待ち行列長 $E[L]$ を実現できる G を繰り返し計算により求めることが可能である。このように、本論文の結果を用いて、ある平均待ち行列長 $E[L]$ を実現するために G をどのような値に設定すればよいのかを考えることができる。

第4章

結論

本論文は、待ち行列理論の枠組みを用いて、サービスシェアリングのあるモデルについて検討をしてきた。特に、一般的なサービスシェアリングのあるモデルの安定条件の判別式 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ を導出できたことには大きな意味がある。本論文においては、到着過程、サービス時間分布に関係なく、サービスシェアリングのあるモデルの安定条件を導出できており、これはとても強力な安定条件となっているためである。また、一般的なサービスシェアリングのあるモデルを定義したことにより、副次的に K 種類のタイプの客が混在するモデルに対応できるようになったことにも意味がある。本論文のように、 K 種類のタイプの客が存在できる場合には、例えば相乗りを許容するタクシー乗り場において、相乗りの可否と、乗車方面による分類（北方向に乗車したい客と南方向に乗車したい客の区別）といった、複数の客の属性を導入しても、安定条件を示すことができる。

数値解析の手法については、木村、滝根らの先行研究の手法が核となっているが、 N の選び方について方針を打ち出せたことに意味がある。先行研究において、 $\tilde{\mathbf{q}}_N$ の精度保証付き近似解の導出はできていたが、 N をどれほどの大きさでとるべきかについては明確な指標が打ち出せていなかった。ヒューリスティックではあるが、 N の定め方を提案できたことに意味がある。

数値解析例からは、面白い結果が得られた。本来、 $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ は、 $\bar{\mathbf{q}}_N(N) \mathbf{1}^\top$ を評価して、 $\bar{\mathbf{q}}_N(N)$ がある閾値未満となるような N を求めるために用いていた。つまり、 $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ を計算して定めた N を用いて、数値計算アルゴリズムの STEP2, 3 を実行していた。ところが、 $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ は、 $\bar{\mathbf{q}}_N(1000) \mathbf{1}^\top$ に対してもタイトな上限を与えており、数値計算アルゴリズムの STEP2, 3 を実行せずとも、 $\sup(\mathbf{q}_N \mathbf{1}^\top)$ の計算をするだけで系内客数分布の簡易な評価をすることができる可能性があることがわかった。

数値計算結果からは、サービスシェアリングのあるモデルの特徴を得ることができた。具体的には、 G の値を安定条件 $\sum_{k=1}^K \rho_k / G_k < 1$ を満たすように設定することで、待ち行列システムを安定状態にすることができること、サービスシェアリングの概念を取り入れることで、平均待ち行列長の大幅な減少を達成することができること、やみくもに G を大きくしても、平均待ち行列長 $E[L]$ が劇的に減少しないことが分かった。

本論文では、数値計算アルゴリズムを用いてレベル依存 QBD であるサービスシェアリングのあるモデルの解析を行ったが、問題点もある。M/M/1 条件下におけるサービスシェアリングのあるモデルのレベル N である状態の数 M_N は客のタイプの数 K と各タイプの最大グループ人数 G_k に依存し、 $M_N = \prod_{k=1}^K (G_k - 1)N + 1$ となることから、客のタイプの種類が1つ増えるだけで各種ブロック行列 Q のサイズが一気に増大してしまう点があげられる。計算量や、計算に用いるメモリ量の改善が今後求められる。

謝辞

本論文を作成するにあたり，指導教員である塩田茂雄先生に多大にご協力いただいたことをここに記し，感謝の意を伝えさせていただきたい。また，塩田先生をはじめとする塩田研究室の皆様に関しましては常日頃お世話になり，そのうえで本論文が完成したことをここに記し，感謝の意を伝えさせていただきたい。

参考文献

- [1] A. K. Erlang, “Probability and Telephone Calls,” *Nyt Tidsskrift for Matematik B*, vol.20, pp. 33-39, 1909.
- [2] D. G. Kendall, “Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain”, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol.24, pp. 338-354, 1953.
- [3] F. Baccelli and P. Bremaud, Elements of Queueing Theory (2nd Edition). *Springer-Verlag*, 2003.
- [4] H. Masuyama and T. Takine, “Algorithmic Computation of the Time-Dependent Solution of Structured Markov Chains and Its Application to Queues,” *Stochastic Models*, vol.21, pp. 885-912, 2005.
- [5] L. Bright and P.G. Taylor, “Calculating the Equilibrium Distribution in Level Dependent Quasi-Birth-and-Death Processes,” *Stochastic Models*, vol.11, pp. 497-525, 1995.
- [6] M. Kimura and T. Takine, “Computing the conditional stationary distribution in Markov chains of level-dependent M/G/1-type,” *Stochastic Models*, vol.34, pp. 207-238, 2018.
- [7] T. Phung-Duc, H. Masuyama, S. Kasahara and Y. Takahashi, “A Simple Algorithm for the Rate Matrices of Level-Dependent QBD Processes”, *Proceedings of The 5th International Conference on Queueing Theory and Network Applications*, 2010, pp. 46-52.
- [8] T. Takine, “Analysis and computation of the stationary distribution in a special class of level-dependent M/G/1-type and its application to BMAP/M/∞ and BMAP/M/c+M queues,” *Queueing Systems*, vol.84, pp. 49-77, 2016.
- [9] 井家敦, 岸康人, 佐久間大, “表計算ソフトで待ち行列を再現してみよう,” *オペレーションズ・リサーチ 経営の科学*, vol.60, No.9, pp.526-531, 2015.
- [10] 尾畑伸明, 確率モデル要論 確率論の基礎からマルコフ連鎖へ, 牧野書店, 2012.
- [11] 木村雅俊, 滝根哲哉, “レベル依存する M/G/1 型マルコフ連鎖における条件付き定常分布の数値計算アルゴリズム,” 2016 年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」報文集, pp. 99-108, 2017.
- [12] 塩田茂雄, 河西憲一, 豊泉洋, 会田雅樹, 待ち行列理論の基礎とその応用, 共立出版, 2014, 川島幸之助 (監修).
- [13] 高橋幸雄, “待ち行列研究の変遷,” *オペレーションズ・リサーチ 経営の科学*, vol.43, No.9, pp.495-499, 1998.
- [14] 滝根哲哉, “M/M/1 を越えて一準出生死滅過程への招待一,” *オペレーションズ・リサーチ 経営の科学*, vol.59, No.4, pp.179-184, 2014.
- [15] 宮沢政清, 待ち行列の数理とその応用, 牧野書店, 2013.

-
- [16] 山本浩, 森隆一, 藤曲哲郎, シミュレーションによる確率論, 日本評論社, 1993.

研究成果

1. 松尾容典, 鶴見星花, 塩田茂雄, “客のグルーピングのある待ち行列の安定条件,” 日本オペレーションズ・リサーチ学会 秋季研究発表会 1-C-10, 2018.
2. 松尾容典, 鶴見星花, 塩田茂雄, “相乗りを考慮したタクシー乗り場の待ち行列モデル,” 第一回 QoS に関する (名大, NII, 早稲田大, 電通大, 芝浦工大, 千葉大合同) 学生技術交流会, 2018.
3. 松尾容典, 鶴見星花, 塩田茂雄, “客のグルーピングのある待ち行列の安定条件: ドリフト条件による導出,” 2018 年度待ち行列シンポジウム, pp. 1-10, 2019.
4. 鶴見星花, 松尾容典, 塩田茂雄, “客のグルーピングのある待ち行列の安定条件: Foster の定理による導出,” 2018 年度待ち行列シンポジウム, pp. 119-121, 2019.
5. 松尾容典, 塩田茂雄, “サービスシェアリングのある待ち行列モデルの数値計算法,” 日本オペレーションズ・リサーチ学会 秋季研究発表会 2-G-2, 2019.
6. 松尾容典, 塩田茂雄, “サービスシェアリングのある待ち行列モデルの数値計算法,” (名大, 早大, 電通大, 広島市立大, NII, 千葉大合同) 第 2 回 学生技術交流会, 2019.
7. 松尾容典, 塩田茂雄, “サービスシェアリングのある待ち行列モデルの安定条件と数値計算法,” 2019 年度待ち行列シンポジウム, pp. 78-87, 2020.