

平成 30 年度 卒業論文

客のグルーピングのある
待ち行列の安定条件

千葉大学工学部都市環境システム学科

15T0228F 鶴見星花

指導教員：塩田茂雄

平成 31 年 2 月 4 日提出

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究目的	1
1.3	本論文の構成	1
第 2 章	準備	2
2.1	待ち行列理論について	2
2.1.1	待ち行列理論	2
2.1.2	待ち行列モデル	2
2.1.3	ケンドールの記号	3
2.1.4	リトルの公式	4
2.2	準出生死滅過程	4
2.3	隠れマルコフ連鎖	6
2.4	フォスターの定理	6
2.5	既存研究	6
第 3 章	モデルの定式化	8
3.1	条件設定	8
3.2	通常モデルの大域平衡式	9
第 4 章	通常モデルの安定条件	12
4.1	ドリフト条件を用いた安定条件の導出	12
4.1.1	k-priority 処理	12
4.1.2	Nonpriority 処理	17
4.1.3	通常モデルの安定条件	20
4.2	フォスターの定理を用いた安定条件の導出	20
4.2.1	準備	20
4.2.2	隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ の安定条件	22
4.2.3	通常モデルの安定条件	25
第 5 章	数値計算	26
5.1	数値計算モデル	26
5.2	数値の算出	28
5.3	解析結果・考察	29

5.3.1	安定条件との関係	29
5.3.2	相乗り人数による比較	33
第 6 章	結論	35
	謝辞	36
	参考文献	37

第 1 章

序論

1.1 研究背景

近年、行列のできる店等の長蛇の行列により、店近隣住民の苦情が多く見受けられることから、適切な待ち行列モデルを構築して行列への対応策をとる必要がある。待ち行列モデルについての研究は数多くあり、中でも、1つのサービス窓口に対して1つの客（団体）がサービスを受けるモデルを対象として多くの研究がされている。しかし実際には、1つのサービス窓口に対して複数の客（団体）がサービスを受けるケースがある場合のモデル（複数の客が共用してサービスを受けることを許すケースがある場合のモデル）も見受けられる。サービスの共用の可否が客により異なるモデルの具体的な例として、飲食店でのテーブルの相席の可否が客により考慮されたモデルやジェットコースターの相乗り可否が客により考慮されたモデル、タクシーの相乗り可否が客により考慮されたモデル等が挙げられる。

1.2 研究目的

本研究では、既存の相乗りの可否が客により異なることを考慮したタクシー乗り場での乗客の待ち行列モデル [1] の、相乗りの最大人数を任意の n 人に拡張したモデルについて考察することを目的とする。主に安定条件（系内容数が発散しないための条件）について考察する。

1.3 本論文の構成

第 1 章では、本研究の背景、研究目的を述べている。

第 2 章では、本研究で使用する考え方や定理、既存研究について説明する。

第 3 章では、本研究の待ち行列モデルについて述べている。

第 4 章では、本研究での待ち行列モデルの安定条件について、ドリフト条件を用いた導出の仕方とフォスターの定理を用いた導出の仕方の 2 通りを説明する。

第 5 章では、プログラムを用いモデルの大域平衡方程式の解析を行う。

第 6 章では、本研究のまとめ、考察を述べる。

第 2 章

準備

第 2 章では、本論で使用する待ち行列理論、準出生死滅過程、隠れマルコフ連鎖、フォスターの定理について述べている。また、最後に既存研究の概要について説明している。

2.1 待ち行列理論について

2.1.1 待ち行列理論

待ち行列は、私たちの生活の身近で見られる現象である。具体的には、遊園地でアトラクションに乗るための行列、宝くじ売り場の行列などがある。

待ち行列理論とは、待ち行列の特性を数理的に調べるための理論である。待ち行列理論を用いると、具体的には、平均待ち行列長、平均待ち時間、到着率、安定条件などを導出することができる。

2.1.2 待ち行列モデル

待ち行列について数理的に調べるためには、まず、待ち行列の特徴を表現するモデルを構築する必要がある。本節では、遊園地でアトラクションに乗るための行列を例に、待ち行列をモデル化する際に必要な用語を定義する。

- 待ち室：アトラクションに乗るために行列を作って待つ場所。
- 窓口：アトラクション。
- 到着：アトラクションに人が訪れる動作。
- 客：アトラクションを訪れる人。
- サービス：アトラクションに乗る。
- 退去：サービス利用が終了してシステムから立ち去ること。

窓口と待ち室とはいずれも複数取する場合もある。また、待ち室と窓口を合わせて待ち行列システムと呼ばれている。図 2.1 は待ち行列モデルを示している。

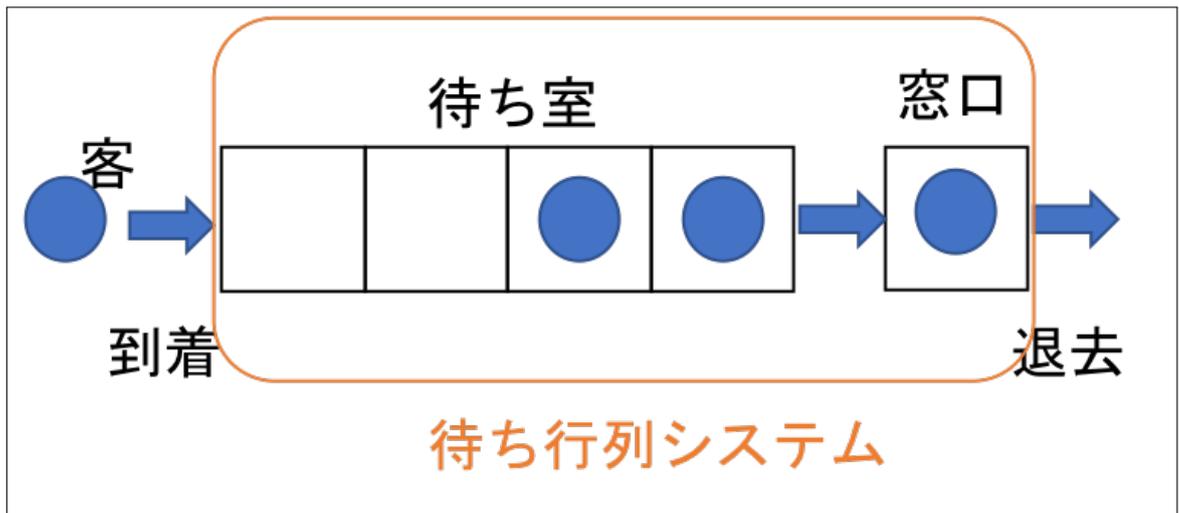


図 2.1 待ち行列モデル

2.1.3 ケンドールの記号

待ち行列モデルの特徴はケンドールの記号を用いて表すことができる。ケンドールの記号は $A/B/c/N$ という形をとり、それぞれ 到着過程/サービス時間分布/窓口数/待ち室の容量 を表している。また、サービス規律は最後に記載する。以下、具体的に用語の説明をしていく。

到着過程

客の到着をモデル化したものである。例えば、ポアソン過程などの指数分布に従う場合は A に M を記入し、客の到着分布の独立性を考慮しない場合は G と記入する。

サービス時間分布

客のサービス時間をモデル化したものである。例えば、指数分布に従う場合は B に M を記入し、サービス時間分布が一般分布かつ独立性を考慮しない場合は G と記入する。

窓口の数

システム内の窓口の個数。

待ち室の容量

待ち室に入れる客数、無限に入れる場合は省略することが多い。

サービス規律

サービスに関する規律である。具体的には、先着順サービスや後着サービス順などがある。先着順サービスは FIFO または FCFS と記載する。先着順サービスの場合は記載を省略することが多い。後着順サービスはいくつか種類があり、非割り込み後着順サービス (LIFO-NP) と呼ばれる窓口でサービス中のサービスを中断せずに待ち行列の先頭に並ぶサービス規律や、割り込み継続型後着順サービス (LIFO-PR) と呼ばれる新たに到着した客が窓口でサービス中の客のサービスを一時中断して窓口でサービスを受け始める規律などがある。

2.1.4 リトルの公式

客の到着率を λ , 平均待ち行列長を L , 平均待ち時間を W とする. リトルの公式とは, このときに成り立つ式 (2.1) である.

$$L = \lambda W \quad (2.1)$$

また, リトルの公式を窓口に対して用いることも可能である. 窓口における待ち時間はサービス時間に等しいので, 例えば客のサービス時間分布が指数分布 μ に従うとき, リトルの公式は式 (2.2) のように成り立つ.

$$L = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.2)$$

窓口のみを対象としたとき, L は窓口に客が存在する確率を表しており, 利用率 ρ と表す.

2.2 準出生死滅過程

準出生死滅過程を説明するために, 具体的なモデルを用いて説明する. モデルの条件は以下の通りである.

- 客の到着は到着率 λ_1 のポアソン過程に従う.
- 客は窓口で 0 と 1 の 2 つのサービスを受け, 必ず $0 \rightarrow 1$ の順にサービスを受ける.
- 次の客は必ず前の客がサービス 1 を終了してから窓口に入り, サービスを受ける.
- 窓口の客が 0 のサービス中のみ客は到着することができる.
- サービス 1 から 2 に移行する到着過程は到着率 λ_2 のポアソン過程に従う.
- サービス 1 を開始してから退去するまでの時間分布は平均 $1/\mu$ の指数分布に従う.
- 窓口は 1 つとする
- 客の待ち室の容量は無限にとる

図 2.2 は状態遷移図を示している. 以上の条件を元にとると, 大域平衡方程式 (2.3),(2.4),(2.5) が導出される.

$$-\lambda_1 \pi_{0,0} + \mu \pi_{1,1} = 0 \quad (2.3)$$

$$\lambda_1 \pi_{i-1,0} - (\lambda_1 + \lambda_2) \pi_{i,0} + \mu \pi_{i+1,1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

$$\lambda_2 \pi_{i,0} - \mu \pi_{i,1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

ここで, 以下のように $\mathbf{B}_{-1}, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_{+1}, \mathbf{Q}_{-1}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_{+1}, \boldsymbol{\pi}_i$ を表現すると, 大域平衡方程式は式 (2.6) で書き下すことができる.

$$\mathbf{B}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_0 = -\lambda_1 \quad \mathbf{B}_{+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda_2 + \mu) & \lambda_2 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}_{+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \pi_{0,0},$$

$$\boldsymbol{\pi}_i = (\pi_{i,0}, \pi_{i,1}) \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
& (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k) \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\
& \Leftrightarrow (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k) \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_{+1} & \mathbf{0} & \dots & \dots \\ \mathbf{B}_{-1} & \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_{+1} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{-1} & \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_{+1} & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{-1} & \mathbf{Q}_0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

式 (2.6) のような大域平衡方程式で表すことのできる連続時間マルコフ連鎖のことを、準出生死滅過程と呼ぶ。準出生死滅過程が正再帰性であるかの判別は、 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{-1} + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_{+1}$ とすると、 \mathbf{Q} の定常分布 $\tilde{\pi}$ がドリフト条件 (2.7) を満たすかどうかで定まる。

$$\tilde{\pi} \mathbf{Q}_{+1} \mathbf{1}^\top < \tilde{\pi} \mathbf{Q}_{-1} \mathbf{1}^\top. \tag{2.7}$$

ただし、 $\tilde{\pi}, \mathbf{Q}$ は以下の式 (2.8), (2.9) を満たしている。

$$\tilde{\pi} \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

$$\tilde{\pi} \mathbf{1}^\top = 1 \tag{2.9}$$

したがって、ドリフト条件を満たすとき、モデルは安定である。ここでは主に準出生死滅過程の安定条件について述べたが、準出生死滅過程の詳しい議論は、待ち行列理論の基礎とその応用 [2] で参照されたい。

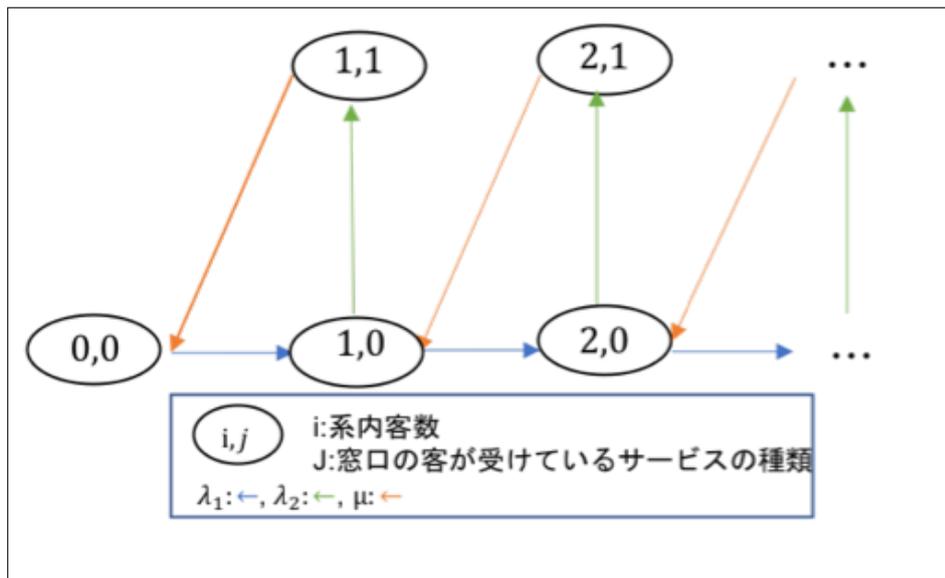


図 2.2 状態遷移図

2.3 隠れマルコフ連鎖

マルコフ性とは、ある確率過程において、未来の状態が現在の状態のみ依存し、過去の状態に依存しない性質のことである。

隠れマルコフ連鎖を説明するために、具体的なモデルを用いて説明する。モデルの条件は以下の通りである。

- 客は到着率 λ のポアソン過程に従い到着する。
- 客はサービス時間分布関数 $H(x)$ に従ってサービスを受ける。
- $H(x)$: パラメタ μ の指数分布に従う分布関数 ($H(x) = 1 - e^{-\mu x}$)。

また、 X_n, A_n, a_k を以下のように定義する。

- X_n : n 番目の客の離脱直後の系内客数。
- A_n : n 番目の客のサービス時間の間に新たに到着する客数。
- a_k : 1 人の客のサービス時間の間に k 人の客が到着する確率 ($A_n = k (k \geq 0)$ となる確率)。

以上のことから、式 (2.10), (2.11) が導出される。

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_n \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dH(x) \\ &= \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)^k \frac{\lambda + \mu}{\mu} \end{aligned} \quad (2.11)$$

式 (2.10) から、 a_k と n は独立であることがわかり、式 (2.10), (2.11) から、 X_{n+1} の確率分布は X_n のみに依存しており、 X_n はマルコフ性を持つことがわかる。

ある確率過程において、注目する時点でマルコフ性を持つ時、これらの時点を隠れマルコフ点という。そのような時点のみに注目して構成されたマルコフ連鎖を隠れマルコフ連鎖という。

2.4 フォスターの定理

フォスターの定理では、状態数が無限の場合に、定常方程式を解くことなく、再帰性やエルゴード性を調べることができる。規約なマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ に対して、状態空間 S 上に定義された非負値関数 h, S の部分集合 $U, \epsilon > 0$ があり、式 (2.12), (2.13) が成り立つときに限り、このマルコフ連鎖は正再帰的である。ここで E_i は条件 $\{X_0 = i\}$ のもとでの条件付き期待値を表す。

$$E_i(h(X_1)) < \infty, i \in U \quad (2.12)$$

$$E_i(h(X_1)) - h(i) \leq -\epsilon, i \in S \setminus U \quad (2.13)$$

定理の詳しい説明は、待ち行列の数理とその応用 [3] を参照されたい。

2.5 既存研究

既存研究として、相乗りの最大人数が 2 人の場合の相乗りを考慮したタクシー乗り場の待ち行列モデル [1] がある。相乗りを許さない客 (タイプ 1) と 2 人ペアを組んで相乗りを許す客 (タイプ 2) を設定し、まだべ

アを組んでいないタイプ2の客が待ち行列にいるときに別のタイプ2の客が到着した場合に、その2人でペアを組み相乗りをすると定義している。図 2.3 は既存研究の状態遷移図を示している。

既存研究では、タクシー乗り場の待ち行列モデルの乗客の平均待ち時間、平均待ち行列長を数値解析を用いて導出し、考察している。また、ドリフト条件を用いた安定条件の導出も行い、2つのタイプの客（2人での相乗りを許可する、許可しない）を考慮するタクシー乗り場の待ち行列モデルの安定条件は、 $\rho_1 + \rho_2/2 < 1$ ($\rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_1}{\mu}$, $\rho_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_2}{\mu}$ と定義している) で表されることが分かっている。

課題点として、許可する相乗りの最大人数を2人とした場合のみの研究であり、任意の n 人については研究されていない点が挙げられる。

以下、相乗りの最大人数を最大相乗り人数とする。本研究では、最大相乗り人数を既存研究の2人から任意の n 人に拡張したタクシー乗り場の待ち行列モデルの安定条件を、ドリフト条件を用いて導出する場合とフォスターの定理を用いて導出する場合の2通りで考える。また、2つのタイプの客（最大3人での相乗りを許可する、許可しない）を考慮するタクシー乗り場の待ち行列モデルの大域方程式の数値解析を行い、考察している。

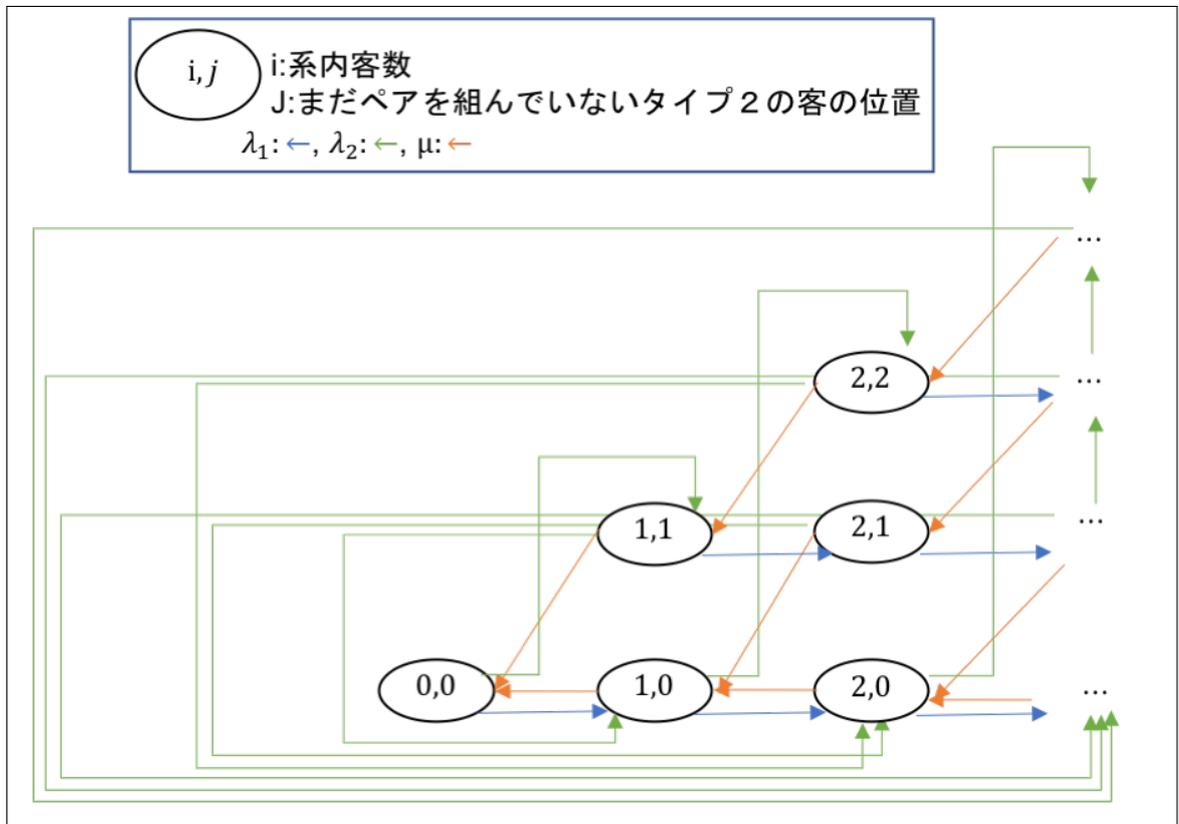


図 2.3 既存研究の状態遷移図

第 3 章

モデルの定式化

3.1 条件設定

本節では、最大相乗り人数を、既存研究の 2 人から任意の n 人に拡張したタクシー乗り場の待ち行列モデルを構築する。以下で条件設定した待ち行列モデルを通常モデルと呼び、また、 $\rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_1}{\mu}$ 、 $\rho_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_2}{\mu}$ と定義する。また、タイプ 2 の未完成グループがサービス受けている最中に到着したタイプ 2 の客は未完成グループに合流できるものとする（この条件は本質的でなく、合流できないものとしても結論は変わらない）。

客について

- タイプ 1（相乗りを許可しない = 1 人でタクシーに乗る）、タイプ 2（相乗りを許可する = グループでタクシーに乗る）の客が到着する。
- 本研究ではタイプ 2 の客がグループを組み相乗りをする。グループの構成人数が n 人のグループを完成グループと呼び、グループの構成人数が n 人未満のグループを未完成グループと呼ぶ。グループは n 人までしか組むことができず、完成グループに新たにタイプ 2 の客が加わることはない。
- 到着したタイプ 1 の客は、行列の最後尾に並ぶ。
- 到着したタイプ 2 の客は、系内に未完成グループがいる場合は、未完成グループに加わり一緒に並ぶ。また、系内に未完成グループがない場合は、行列の最後尾に並ぶ。

相乗りとは

タイプ 2 の乗客が到着したときに、系内の未完成グループに到着したタイプ 2 の客が加わる行為を相乗りをすると定義する。

到着過程について

タイプ 1 とタイプ 2 の客は、それぞれ到着率 λ_1 および λ_2 のポアソン過程に従って到着する。

サービス時間分布について

タクシーの到着率を μ とする。客はタクシーが到着するとタクシー乗り場から即時に抜けるとする。したがって、本研究では、客が受けるサービス時間は客のタイプ（タイプ 1、タイプ 2）にかかわらず平均 $\frac{1}{\mu}$ の指数分布に従うと考える。タイプ 2 の客の場合は構成人数が i ($1 \leq i \leq n$) 人のグループは i 人まとめてサービスを受け、その場合のサービス時間も平均 $\frac{1}{\mu}$ の指数分布に従う。

窓口について

- 窓口となるタクシー乗り場は1つである.
- タクシーは待ち行列を作らないとする.

待ち室の容量について

客の待ち室の容量は無限にとる.

サービス規律について

サービスは行列の先頭にいる客から順に行われる.

3.2 通常モデルの大域平衡式

以下のように $I(t), J(t), M(t), (i, j, m), \pi_{i,j,m}$ を定義する.

- $I(t)$:時刻 t での系内客数 (完成グループの客・未完成グループは1人とカウントする).
- $J(t)$:未完成グループの位置.
- $M(t)$:未完成グループの構成人数.
- (i, j, m) :系内客数が i , 未完成グループの位置が $j(0 \leq j \leq i)$, 未完成グループの構成人数が m の状態.
- $\pi_{i,j,m}$:状態 (i, j, m) の定常分布.

状態遷移図は図 3.1 のように描ける. また, 例えば, 最大相乗り人数が2人の場合の客が到着した時の客の待ち行列の様子は図 3.2 のように描ける. 以上のことから, 確率過程 $\{I(t), J(t), M(t); t \geq 0\}$ の大域平衡方程式 (3.1),(3.2) が導出される.

$$\pi_{0,0,0}D_0^{(0)} + \pi_1\mathbf{H}_{-1}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$\pi_{i-1}\mathbf{H}_{+1}^{(i)} + \pi_i\mathbf{H}_0^{(i)} + \pi_{i+1}\mathbf{H}_{-1}^{(i)} = \mathbf{0} \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

ここでは, $D_0^{(0)}, \mathbf{H}_{+1}^{(i)}, \mathbf{H}_0^{(i)}, \mathbf{H}_{-1}^{(i)}, \mathbf{e}_{n-1}^\top, \mathbf{1}^\top, \mathbf{e}_1, \mathbf{I}_{n-1}^+$ は以下のように定義した行列であり, $\mathbf{H}_{+1}^{(i)}$ は $((n-1)(i-1)+1) \times ((n-1)i+1)$, $\mathbf{H}_0^{(i)}$ は $((n-1)i+1) \times ((n-1)i+1)$, $\mathbf{H}_{-1}^{(i)}$ は $((n-1)(i+1)+1) \times ((n-1)i+1)$ の行列である. \mathbf{e}_{n-1}^\top と $\mathbf{1}^\top$ は $(n-1) \times 1$, \mathbf{e}_1 は $1 \times (n-1)$ の行列, \mathbf{I}_{n-1}^+ は $(n-1) \times (n-1)$ の正方行列, $\mathbf{0}$ は全ての要素が0の横ベクトル, \mathbf{O} は全ての要素が0の行列, \mathbf{I}_{n-1} は $(n-1)$ 次, $\mathbf{I}_{(n-1)i+1}$ は $(n-1)i+1$ 次の単位行列である.

$$D_0^{(0)} = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \mathbf{H}_{+1}^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \lambda_2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0}^\top & \lambda_1\mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & \dots & \mathbf{O} & \lambda_1\mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^{(i)} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\mathbf{I}_{(n-1)i+1} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \lambda_2\mathbf{e}_{n-1}^\top & \lambda_2\mathbf{I}_{n-1}^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & \mathbf{O} & \ddots & \mathbf{O} \\ \lambda_2\mathbf{e}_{n-1}^\top & \mathbf{O} & \dots & \lambda_2\mathbf{I}_{n-1}^+ \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{-1}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mu & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mu\mathbf{1}^\top & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{0}^\top & \mu\mathbf{I}_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{O} \\ \mathbf{0}^\top & \dots & \mathbf{O} & \mu\mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$e_{n-1}^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \quad \mathbf{I}_{n-1}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なお、通常モデルのもとでは、系内容数が i の定常分布ベクトル π_i は、式 (3.3) のように表すことができる。

$$\pi_i = (\pi_{i,0,0}, \pi_{i,1,1}, \dots, \pi_{i,1,n-1}, \pi_{i,2,1}, \dots, \pi_{i,2,n-1}, \dots, \pi_{i,i,1}, \dots, \pi_{i,i,n-1}) \quad (3.3)$$

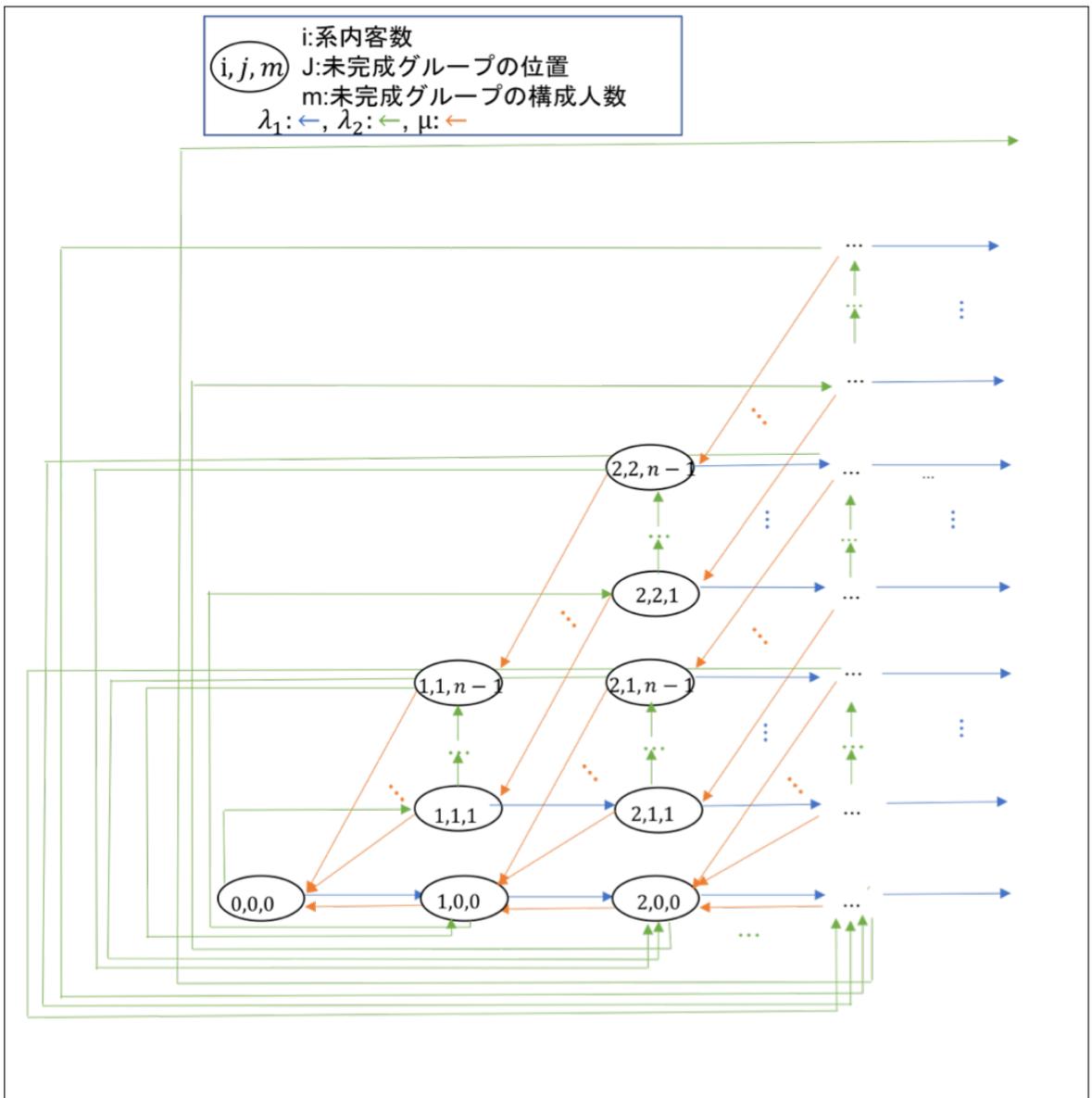


図 3.1 状態遷移図

第 4 章

通常モデルの安定条件

4.1 ドリフト条件を用いた安定条件の導出

通常モデルはドリフト条件を用いた安定条件の導出が困難である。そこで、通常モデルの安定条件を探るために、通常モデルの条件に変更を加えることにより直接ドリフト条件が計算できるモデルを 2 つ（後述 k-priority 処理, Nonpriority 処理）作る。次に、2 つのモデルの安定条件を元に通常モデルの安定条件を求める。

4.1.1 k-priority 処理

通常モデルの条件を以下のように変更したモデルを、本稿では、k-priority 処理と呼ぶ。

通常モデルとの変更点

タイプ 2 の客の到着時に系内に未完成グループがない場合、系内客数が k 以上ならば到着した客を行列の先頭から k 番目に並ばせ、系内客数が k 未満ならば到着した客を行列の最後尾に並ばせる。

例えば、最大相乗り人数が 2 人のときの通常モデルと $k = 4$ の場合の k-priority 処理の変更点は図 4.1 のように描け、 $k = 3$ の場合の状態遷移図は図 4.2 のように描ける。

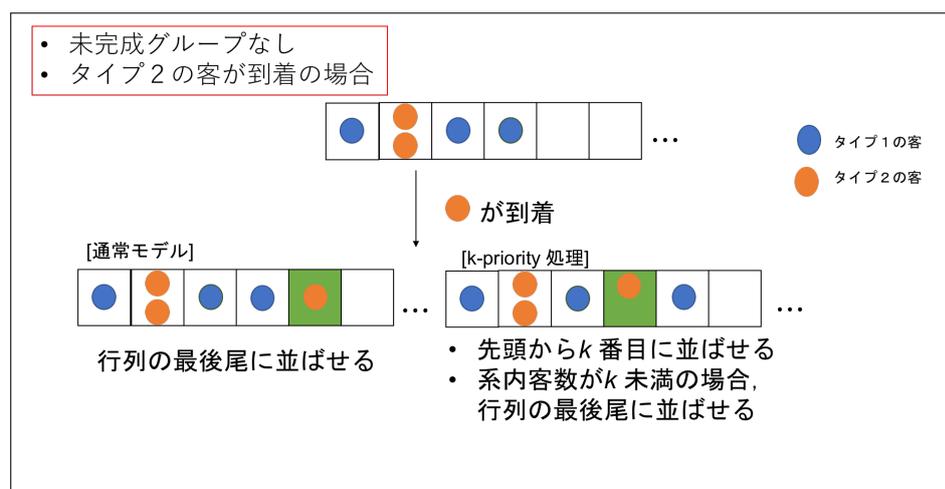


図 4.1 最大相乗り人数が 2 人のときの通常モデルと $k = 4$ の場合の k-priority 処理の変更点

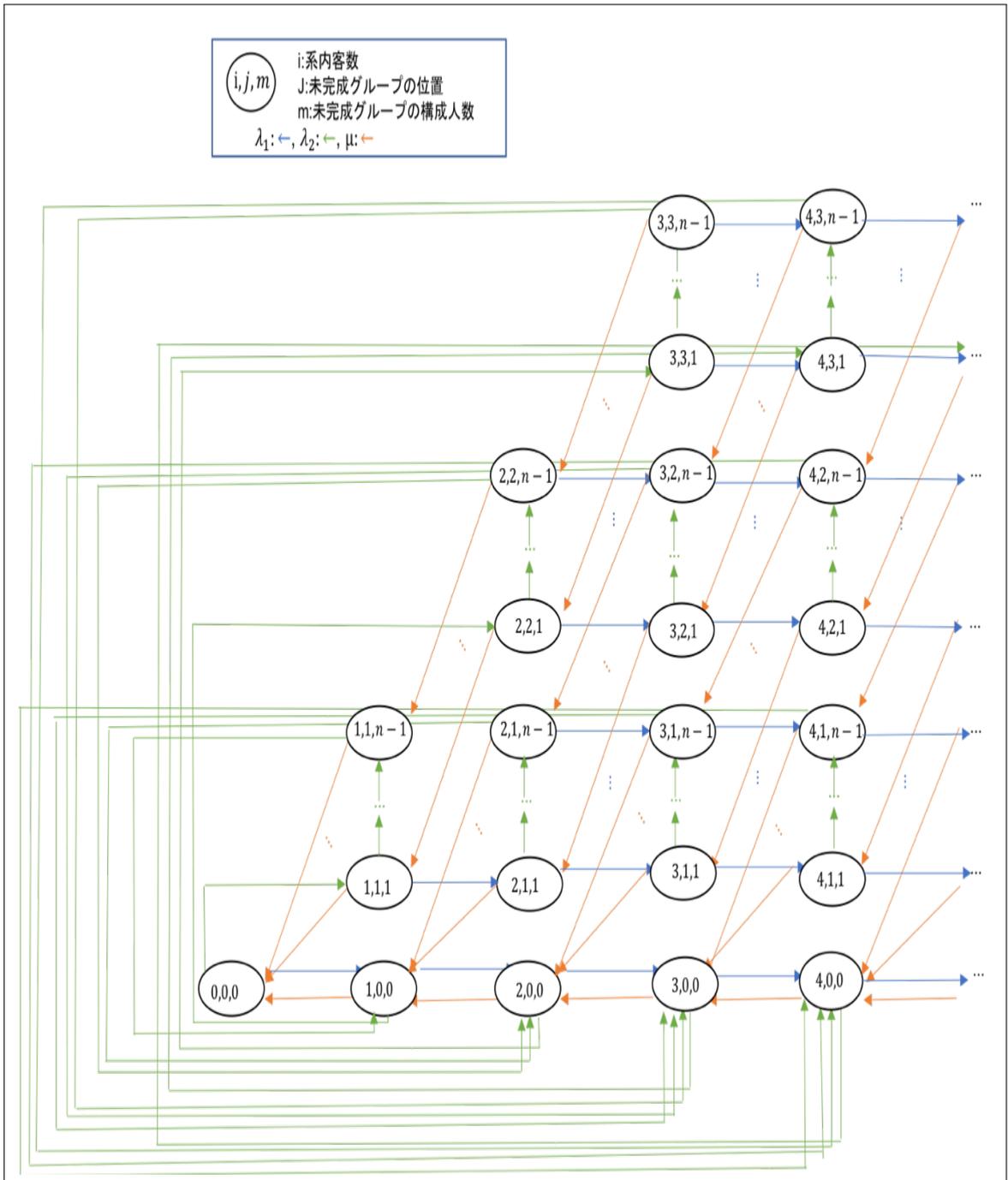


図 4.2 $k = 3$ の場合の k -priority 処理の状態遷移図

k -priority 処理のもとでは，確率過程 $\{I(t), J(t), N(t); t \geq 0\}$ の大域平衡方程式 (4.1)~(4.4) が導出される．

$$\pi_{0,0,0} \mathbf{D}_0^{(0)} + \pi_1 \mathbf{H}_{-1}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

$$\pi_{i-1} \mathbf{H}_{+1}^{(i)} + \pi_i \mathbf{H}_0^{(i)} + \pi_{i+1} \mathbf{H}_{-1}^{(i)} = \mathbf{0} \quad i = 1, 2 \dots k-1 \quad (4.2)$$

$$\pi_{k-1} \mathbf{H}_{+1}^{(k)} + \pi_k \mathbf{H}_0^{(k)} + \pi_{k+1} \mathbf{T}_{-1}^{(k)} = \mathbf{0} \quad i = k \quad (4.3)$$

$$\pi_{i-1} \mathbf{T}_{+1}^{(k)} + \pi_i \mathbf{H}_0^{(k)} + \pi_{i+1} \mathbf{T}_{-1}^{(k)} = \mathbf{0} \quad i = k+1, k+2 \dots \quad (4.4)$$

また, $D_0^{(0)}, \mathbf{H}_{+1}^{(i)}, \mathbf{H}_0^{(i)}, \mathbf{H}_{-1}^{(i)}$ は 3.2 節で定義している行列であり, $\mathbf{T}_{+1}^{(k)}, \mathbf{T}_{-1}^{(k)}$ は以下のように定義した行列である. $\mathbf{T}_{+1}^{(k)}$ と $\mathbf{T}_{-1}^{(k)}$ はいずれも $((n-1)k+1) \times ((n-1)k+1)$ の正方行列である.

$$\mathbf{T}_{+1}^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0}^\top & \lambda_1 \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_1 \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \lambda_1 \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{-1}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mu & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mu \mathbf{1}^\top & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & \mu \mathbf{I}_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & \dots & \mathbf{0} & \mu \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

なお, k-priority 処理のもとでは, 系内客数が i の定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}_i$ は, $i \geq k$ の場合, 長さ $(n-1)k+1$ のベクトルとなる ($J(t) \leq k$ のため). 具体的には式 (4.5) のように導出される.

$$\boldsymbol{\pi}_i = \begin{cases} (\pi_{i,0,0}, \pi_{i,1,1}, \dots, \pi_{i,1,n-1}, \pi_{i,2,1}, \dots, \pi_{i,2,n-1}, \dots, \pi_{i,i,1}, \dots, \pi_{i,i,n-1}) & i < k \\ (\pi_{i,0,0}, \pi_{i,1,1}, \dots, \pi_{i,1,n-1}, \pi_{i,2,1}, \dots, \pi_{i,2,n-1}, \dots, \pi_{i,k,1}, \dots, \pi_{i,k,n-1}) & i \geq k \end{cases} \quad (4.5)$$

k-priority 処理のもとでは, 確率過程 $\{I(t), J(t), M(t); t \geq 0\}$ は, ブロック行列が $((n-1)k+1) \times ((n-1)k+1)$ の準出生死滅過程となり, その定常分布は, 式 (4.6) のように導出される.

$$\boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_k \mathbf{R}^{i-k} \quad i = k, k+1, \dots \quad (4.6)$$

\mathbf{R} は公比行列であり, 次の方程式 (4.7) を満たす非負最小解として与えられる.

$$\mathbf{T}_{+1}^{(k)} + \mathbf{R} \mathbf{H}_0^{(k)} + \mathbf{R}^2 \mathbf{T}_{-1}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

また $\pi_{0,0,0}, \boldsymbol{\pi}_1, \dots, \boldsymbol{\pi}_k$ は次の式 (4.8), (4.9) の解である.

$$(\pi_{0,0,0}, \boldsymbol{\pi}_1, \dots, \boldsymbol{\pi}_k) \begin{pmatrix} D_0^{(0)} & \mathbf{H}_{+1}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{-1}^{(0)} & \mathbf{H}_0^{(1)} & \mathbf{H}_{+1}^{(2)} \\ & \ddots & \ddots \\ & & \mathbf{H}_{-1}^{(k-2)} & \mathbf{H}_0^{(k-1)} & \mathbf{H}_{+1}^{(k)} \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{-1}^{(k-1)} & \mathbf{H}_0^{(k)} + \mathbf{R} \mathbf{T}_{-1}^{(k)} \end{pmatrix} = (0, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \quad (4.8)$$

$$\pi_{0,0,0} + \boldsymbol{\pi}_1 \mathbf{1}^\top + \dots + \boldsymbol{\pi}_k (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}^\top = 1 \quad (4.9)$$

k-priority 処理の安定条件を探るために以下のように行列 $\mathbf{T}^{(k)}$ を行列式 (4.11) のように定義する.

$$\mathbf{T}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{+1}^{(k)} + \mathbf{H}_0^{(k)} + \mathbf{T}_{-1}^{(k)} \quad (4.10)$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{1}^\top + \lambda_2 \mathbf{e}_{n-1}^\top & \lambda_2 \mathbf{I}_{n-1}^+ - (\lambda_2 + \mu) \mathbf{I}_{n-1} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \lambda_2 \mathbf{e}_{n-1}^\top & \mu \mathbf{I}_{n-1} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \lambda_2 \mathbf{e}_{n-1}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu \mathbf{I}_{n-1} & \lambda_2 \mathbf{I}_{n-1}^+ - (\lambda_2 + \mu) \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

ここで, $\mathbf{T}^{(k)}$ の定常確率分布 $\tilde{\boldsymbol{\pi}} (= \tilde{\pi}_0, \tilde{\boldsymbol{\pi}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\pi}}_{(n-1)k})$ は以下の 2 式 (4.12), (4.13) を満たしている.

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{T}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

$$\sum_{l=0}^{(n-1)k} \tilde{\pi}_l = 1 \quad (4.13)$$

$\mathbf{x}_i, \mathbf{T}^{(k)}$ を以下の行列式 (4.14),(4.15) のように定義する.

$$\begin{cases} \tilde{\pi}_0 = \tilde{\pi}_0 = \mathbf{x}_0 \\ \tilde{\pi}_i = \mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n-1}) = (\tilde{\pi}_{(n-1)(i-1)+1}, \tilde{\pi}_{(n-1)(i-1)+2}, \dots, \tilde{\pi}_{(n-1)i}) \quad i = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{T}^{(k)} = (\mathbf{a} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_{k-1} \quad \mathbf{b}_k) \quad (4.15)$$

式 (4.12) を用いると, 式 (4.12) は以下の式 (4.16),(4.17),(4.18) ように書き下すことができる.

$$\tilde{\pi} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

$$\tilde{\pi} \mathbf{b}_k = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

$$\tilde{\pi} \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \quad i = k-1, k-2, \dots, 1 \quad (4.18)$$

(4.17) より, 式 (4.19) が導出される.

$$\begin{cases} \lambda_2 \tilde{\pi}_0 - (\lambda_2 + \mu) \tilde{\pi}_{(n-1)(k-1)+1} = 0 \\ \lambda_2 \tilde{\pi}_{(n-1)(k-1)+l} - (\lambda_2 + \mu) \tilde{\pi}_{(n-1)(k-1)+l+1} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n-2 \end{cases} \quad (4.19)$$

(4.18) より, 式 (4.20) が導出される.

$$\begin{cases} -(\lambda_2 + \mu) \tilde{\pi}_{(n-1)(i-1)+1} + \mu \tilde{\pi}_{(n-1)i+1} = 0 \\ \lambda_2 \tilde{\pi}_{(n-1)(i-1)+l} - (\lambda_2 + \mu) \tilde{\pi}_{(n-1)(i-1)+l+1} + \mu \tilde{\pi}_{(n-1)i+l+1} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n-2 \end{cases} \quad (4.20)$$

(4.19),(4.20) より, 漸化式 (4.21) が導出される.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \tilde{\pi}_0, \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right)^2 \tilde{\pi}_0, \dots, \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right)^{n-1} \tilde{\pi}_0 \right) \\ \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1} \frac{1}{1+\rho_2} \mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{x}_i \frac{\rho_2}{1+\rho_2} \mathbf{I}_{n-1}^+ \quad i = k-1, k-2, \dots, 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

漸化式 (4.21) は以下のように書き下すことができる.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{x}_k & = & \frac{\rho_2}{1+\rho_2} \tilde{\pi}_0 & \frac{\rho_2^2}{(1+\rho_2)^2} \tilde{\pi}_0 & \frac{\rho_2^3}{(1+\rho_2)^3} \tilde{\pi}_0 & \dots, & \frac{\rho_2^{n-1}}{(1+\rho_2)^{n-1}} \tilde{\pi}_0 \\ \mathbf{x}_{k-1} & = & \frac{\rho_2}{(1+\rho_2)^2} \tilde{\pi}_0 & 2 \frac{\rho_2^2}{(1+\rho_2)^3} \tilde{\pi}_0 & 3 \frac{\rho_2^3}{(1+\rho_2)^4} \tilde{\pi}_0 & \dots, & (n-1) \frac{\rho_2^{n-1}}{(1+\rho_2)^n} \tilde{\pi}_0 \\ \mathbf{x}_{k-2} & = & \frac{\rho_2}{(1+\rho_2)^3} \tilde{\pi}_0 & 3 \frac{\rho_2^2}{(1+\rho_2)^4} \tilde{\pi}_0 & 6 \frac{\rho_2^3}{(1+\rho_2)^5} \tilde{\pi}_0 & \dots, & \frac{1}{2} n(n-1) \frac{\rho_2^{n-1}}{(1+\rho_2)^{n+1}} \tilde{\pi}_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_1 & = & \binom{k-1}{0} \frac{\rho_2}{(1+\rho_2)^k} \tilde{\pi}_0 & \binom{k}{1} \frac{\rho_2^2}{(1+\rho_2)^{k+1}} \tilde{\pi}_0 & \binom{k+1}{2} \frac{\rho_2^3}{(1+\rho_2)^{k+2}} \tilde{\pi}_0 & \dots & \binom{k+n-3}{n-2} \frac{\rho_2^{n-1}}{(1+\rho_2)^{k+n-2}} \tilde{\pi}_0 \end{array}$$

$x_{i,j} = \frac{\rho_2^j}{(1+\rho_2)^{k-i+j}} \tilde{\pi}_0 A_{i,j}$ とする. 係数 $A_{i,j}$ は (4.21) とパスカルの三角定理を用いると, $\binom{k-i+j-1}{j-1}$ と導くことができる. よって, $x_{i,j}$ は式 (4.22) のように書き下すことができる.

$$x_{i,j} = \binom{k-i+j-1}{j-1} \frac{\rho_2^j}{(1+\rho_2)^{k-i+j}} \tilde{\pi}_0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.22)$$

次に, $\tilde{\pi}_0$ を求める. 式 (4.16) より, 式 (4.23) が導出される.

$$-\lambda_2 \tilde{\pi}_0 + \mu \sum_{j=1}^{n-1} x_{1,j} + \lambda_2 \sum_{i=1}^k x_{i,n-1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_{i,n-1} = \tilde{\pi}_0 - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} x_{1,j}}{\rho_2} \quad (4.23)$$

式 (4.21) から, 式 (4.24) が導出される.

$$\begin{cases} x_{i,j} \frac{\rho_2}{1+\rho_2} = x_{i,j+1} - x_{i+1,j+1} \frac{1}{1+\rho_2} \quad i = k-1, k-2, \dots, 1, j = 1, 2, \dots, n-2 \\ x_{k,j} \frac{\rho_2}{1+\rho_2} = x_{k,j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, n-2) \end{cases} \quad (4.24)$$

式 (4.24) から, $\sum_{i=1}^k x_{i,j}$ の漸化式 (4.25) を作る.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} x_{i,j} \frac{\rho_2}{1+\rho_2} &= \sum_{i=1}^{k-1} x_{i,j+1} - \sum_{i=1}^{k-1} x_{i+1,j+1} \frac{1}{1+\rho_2} \\
\sum_{i=1}^k x_{i,j} \frac{\rho_2}{1+\rho_2} &= \sum_{i=1}^k x_{i,j+1} - \frac{1}{1+\rho_2} \sum_{i=1}^{k-1} x_{i+1,j+1} \\
\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_{i,j} &= \sum_{i=1}^k x_{i,j} + \frac{1}{\rho_2} \left(\sum_{i=1}^k x_{i,j+1} - \sum_{i=1}^{k-1} x_{i+1,j+1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^k x_{i,j+1} + \frac{1}{\rho_2} x_{1,j+1}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ここで, $\sum_{i=1}^k x_{i,j} = g(j)$ とする. 式 (4.23), 式 (4.25) より, 式 (4.26) が導出される.

$$\begin{cases} g(n-1) = \tilde{\pi}_0 - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} x_{1,j}}{\rho_2} \\ g(j) = g(j+1) + \frac{1}{\rho_2} x_{1,j+1} \quad j = n-2, n-3, \dots, 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow g(j) = \tilde{\pi}_0 - \frac{\sum_{j=1}^j x_{1,j}}{\rho_2} \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \tag{4.26}$$

また, 式 (4.13), 式 (4.26) より, 式 (4.27) が導出される.

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} g(j) &= \sum_{l=0}^{(n-1)k} \tilde{\pi}_l = (n - (1+\rho_2)^{-k} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right)^{l-1} \binom{k+l-2}{l-1}) \tilde{\pi}_0 = 1 \\
\Leftrightarrow \tilde{\pi}_0 &= \frac{1}{n - (1+\rho_2)^{-k} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right)^{l-1} \binom{k+l-2}{k-1}}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

よって, 式 (4.22), 式 (4.27) より, $\tilde{\pi}$ は以下の式 (4.28) ように導出される.

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi} &= \frac{1}{n - (1+\rho_2)^{-k} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right)^{l-1} \binom{k+l-2}{k-1}} \\
&= \left(1, \frac{\rho_2}{(1+\rho_2)^k} \binom{k-1}{k-1}, \dots, \frac{\rho_2^{n-1}}{(1+\rho_2)^{k+n-2}} \binom{k+n-3}{k-1}, \dots, \frac{\rho_2}{1+\rho_2}, \frac{\rho_2^2}{(1+\rho_2)^2}, \dots, \frac{\rho_2^{n-1}}{(1+\rho_2)^{n-1}} \right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

式 (4.28) を用い, ドリフト条件を計算すると, k -priority 処理のもとでの安定条件 (4.29) が導出される.

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi} \mathbf{T}_{+1}^{(k)} \mathbf{1}^\top &= \lambda_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\pi}_i + \lambda_2 \tilde{\pi}_0 \\
&= \lambda_1 + \lambda_2 \tilde{\pi}_0 \\
\tilde{\pi} \mathbf{T}_{-1}^{(k)} \mathbf{1}^\top &= \mu \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\pi}_i = \mu \\
\tilde{\pi} \mathbf{T}_{+1}^{(k)} \mathbf{1}^\top < \tilde{\pi} \mathbf{T}_{-1}^{(k)} \mathbf{1}^\top &\Leftrightarrow \rho_1 + \frac{\rho_2}{n - (1+\rho_2)^{-k} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2} \right)^{l-1} \binom{k+l-2}{k-1}} < 1
\end{aligned} \tag{4.29}$$

ここで、k-priority 処理の k について極限をとったときの安定条件を考える。

$(1 + \rho_2)^{-k} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2}\right)^{l-1} \binom{k+l-2}{k-1} = G$ とすると、k-priority 処理のもとでの安定条件式 (4.29) は以下の式 (4.30) ように書き下すことができる。

$$\rho_1 + \frac{\rho_2}{n - G} < 1 \quad (4.30)$$

また、 $h(j) = \frac{\rho_2^{j-1}(n-j)\binom{k+j-2}{k-1}}{(1+\rho_2)^{k+j-1}}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) とすると、 G は式 (4.31) のように書き下すことができる。

$$G = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^j h(j) \quad (4.31)$$

$1 + \rho_2 > 1$ および $\binom{k+j-2}{k-1} \leq (k+j-2)^{j-1}$ であることから、 $h(j)$ に対し k の極限をとると、以下の式 (4.32) が得られる

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} h(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_2^{j-1}(n-j)\binom{k+j-2}{k-1}}{(1+\rho_2)^{k+j-1}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_2^{j-1}(n-j)(k+j-2)^{j-1}}{(1+\rho_2)^{k+j-1}} = 0 \quad (4.32)$$

式 (4.32) より、k-priority 処理の安定条件の左辺を k について極限をとると、式 (4.33) のようになる。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\rho_1 + \frac{\rho_2}{n - G} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\rho_1 + \frac{\rho_2}{n - \sum_{j=1}^{n-1} h(j)} \right) = \rho_1 + \frac{\rho_2}{n} \quad (4.33)$$

したがって、k-priority 処理の安定条件を k について極限をとると、式 (4.33) のようになる。

$$\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1 \quad (4.34)$$

4.1.2 Nonpriority 処理

通常モデルの条件を以下のように変更したモデルを、本稿では、Nonpriority 処理と呼ぶ。

通常モデルとの変更点

未完成グループを常に行列の最後尾に並ばせる。

通常モデルでは、確率過程 $\{I(t), J(t), M(t); t \geq 0\}$ について考えたが、Nonpriority 処理では $J(t)$ (未完成グループの位置) は常に行列の最後尾に固定されるので省略する。以下のように $(i, m), \pi_{i,m}$ を定義する。

- (i, m) : 系内客数が i 、未完成グループの構成人数が m の状態。
- $\pi_{i,m}$: 状態 (i, m) の定常確率分布。

例えば、最大相乗り人数が 2 人のときの通常モデルと Nonpriority 処理の変更点は図 4.3 のように描け、最大相乗り人数が 4 人のときの状態遷移図は図 4.4 のように描ける。

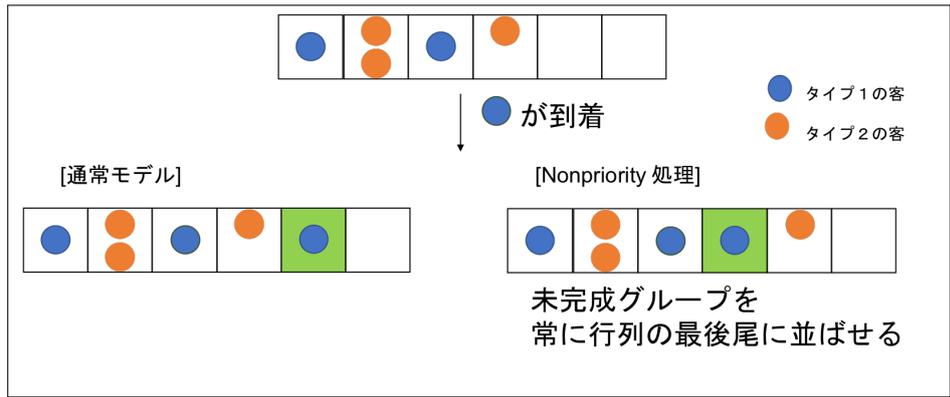


図 4.3 最大相乗り人数が2人のときの通常モデルと Nonpriority 処理の変更点

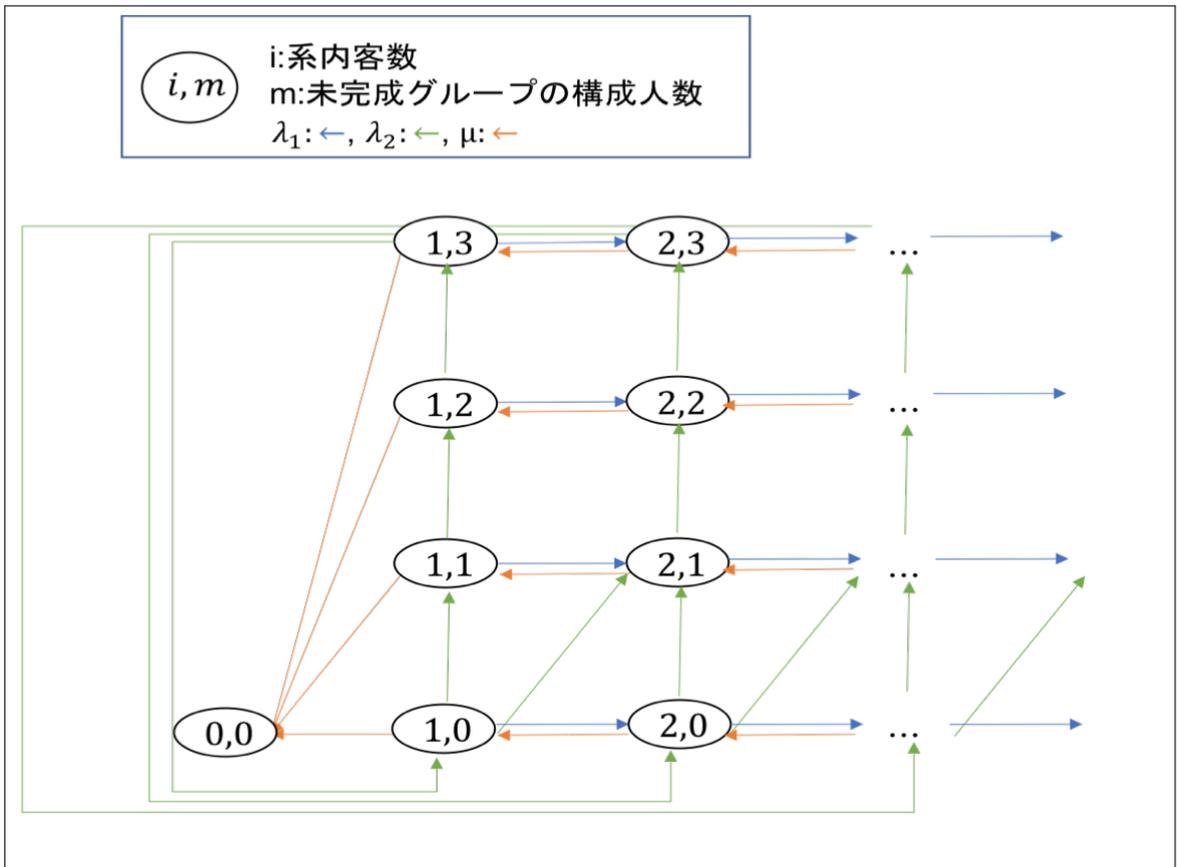


図 4.4 最大相乗り人数が4人のときの状態遷移図

Nonpriority 処理のもとでは, 確率過程 $\{I(t), M(t); t \geq 0\}$ の大域平衡方程式 (4.35),(4.36),(4.37) が導出される.

$$\pi_{0,0}D_0^{(0)} + \pi_1H_{-1}^{(0)} = 0 \quad (4.35)$$

$$\pi_{0,0}H_{+1}^{(1)} + \pi_1H_0^{(1)} + \pi_2B_{-1}^{(n)} = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

$$\pi_{i-1}T_{+1}^{(1)} + \pi_iH_0^{(1)} + \pi_{i+1}B_{-1}^{(n)} = \mathbf{0} \quad i = 2, 3, \dots \quad (4.37)$$

$H_{+1}^{(1)}, H_0^{(1)}, H_{-1}^{(1)}$ は, 3.2 節で定義した $H_{+1}^{(i)}, H_0^{(i)}, H_{-1}^{(i)}$ における $i = 1$ の時の行列であり, $T^{(1)}$ は, 4.1.1 節で定義した $T^{(k)}$ における $k = 1$ の時の行列である. また, $B_{-1}^{(n)}$ は $n \times n$ の行列である.

$$B_{-1}^{(n)} = \mu I_n$$

なお, Nonpriority 処理のもとでは, 系内容数が i の定常分布ベクトル π_i は, 長さ n のベクトルであり, 式 (4.38) のように導出される.

$$\pi_i = (\pi_{i,0}, \dots, \pi_{i,n-1}) \quad (4.38)$$

Nonpriority 処理のもとでは, 確率過程 $\{I(t), M(t); t \geq 0\}$ は, ブロック行列が $n \times n$ に固定される準出生死滅過程となり, 定常分布は, 式 (4.39) のように導出される.

$$\pi_i = \pi_1 R^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.39)$$

R は公比行列であり, 次の方程式 (4.40) を満たす非負最小解として与えられる.

$$T_{+1}^{(1)} + RH_0^{(1)} + R^2B_{-1}^{(n)} = \mathbf{0} \quad (4.40)$$

また $\pi_{0,0}, \pi_1$ は次の式 (4.41),(4.42) の解である.

$$(\pi_{0,0}, \pi_1) \begin{pmatrix} D_0^{(0)} & H_{+1}^{(1)} \\ H_{-1}^{(1)} & H_0^{(1)} + RB_{-1}^{(n)} \end{pmatrix} = (0, \mathbf{0}) \quad (4.41)$$

$$\pi_{0,0} + \pi_1(I - R)^{-1}\mathbf{1}^T = 1 \quad (4.42)$$

Nonpriority 処理のもとでの安定条件を探るために行列 Q を行列式 (4.43) のように定義する

$$D \stackrel{\text{def}}{=} T_{+1}^{(1)} + H_0^{(1)} + B_{-1}^{(n)} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

ここで, D の定常分布 $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_{n-1})$ は以下の 2 式 (4.44),(4.45) を満たしている.

$$\tilde{\pi}D = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\pi}_i = 1 \quad (4.45)$$

式 (4.44),(4.45) を書き下すと, 式 (4.46),(4.47),(4.48) が導出される.

$$-\lambda_2\tilde{\pi}_0 + \lambda_2\tilde{\pi}_{n-1} = 0 \quad (4.46)$$

$$\lambda_2\tilde{\pi}_{i-1} - \lambda_2\tilde{\pi}_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.47)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\pi}_i = 1 \quad (4.48)$$

式 (4.46),(4.47),(4.48) から D の定常分布 $\tilde{\pi}$ は, 式 (4.49) のように導出される.

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{n} (1, \dots, 1) \quad (4.49)$$

上式 (4.49) を用い, ドリフト条件を計算すると, Nonpriority 処理のもとでの安定条件 (4.50) が導出される

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} T_{+1}^{(1)} \mathbf{1}^\top &= \lambda_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\pi}_i + \lambda_2 \tilde{\pi}_0 \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 \tilde{\pi}_0 \end{aligned}$$

$$\tilde{\pi} B_{-1}^{(n)} \mathbf{1}^\top = \mu \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\pi} = \mu$$

$$\tilde{\pi} T_{+1}^{(1)} \mathbf{1}^\top < \tilde{\pi} B_{-1}^{(n)} \mathbf{1}^\top = \lambda_1 + \lambda_2 \tilde{\pi}_0 < \mu \Leftrightarrow \rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1 \quad (4.50)$$

4.1.3 通常モデルの安定条件

客のグルーピングのある待ち行列の安定条件 [4][5][6] より, k-priority 処理の安定条件は通常モデルの安定条件の十分条件, Nonpriority 処理の安定条件は通常モデルの安定条件の必要条件となることが示されている. よって通常モデルの安定条件は, k-priority 処理の安定条件と Nonpriority 処理の安定条件に挟まれる形で存在する. $k \rightarrow \infty$ の時の安定条件は $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$, Nonpriority 処理の安定条件は $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$ であることから, 通常モデルの安定条件 (4.51) が導出される.

$$\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1 \quad (4.51)$$

4.2 フォスターの定理を用いた安定条件の導出

4.2.1 準備

隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$

通常モデルに以下の条件を加える.

- 時刻 0 以降に最初に到着したグループ先頭客を 0 番目のグループ先頭客とする.
- i 番目のグループ先頭客が到着した時点での系内客数を X_i とする.

本節では, 通常モデルから, 隠れマルコフ点をタイプ 2 の客の各グループを構成する最初の客 (グループ先頭客) の到着時点とした隠れマルコフ連鎖を構成する.

本研究では, 「通常モデルが安定である」ことを「隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ が定常分布を有する」こととみなし, 「隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ が定常分布を有する」ための条件を導出する [7]. ここで, 隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ は, 通常モデルの状態遷移図 4.5 中の黒い四角で囲ってある状態で構成されているものである. タクシーの到着率を μ とする. 客はタクシーが到着するとタクシー乗り場から即時に抜けるとしているので, 系内客数は客の待ち行列長と一致することを留意されたい.

隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ でのフォスターの定理の適用条件

$\{X_i\}$ は既約な離散時間マルコフ連鎖となる。フォスターの定理より、 $L \geq 0$ および $\epsilon > 0$ が存在し、全ての $l \geq L$ について

$$E[X_1|X_0 = l] - l \leq -\epsilon, \tag{4.52}$$

であれば $\{X_i\}$ は正再帰的であり、したがって定常分布を持つ。 $E[X_1|X_0 = l]$ は、0 番目のグループ先頭客が到着した時点での系内容数 l である時の 1 番目のグループ先頭客が到着した時点での平均系内容数である。

フォスターの定理が適用されるための条件 ($L \geq 0$ および $\epsilon > 0$ が存在し、全ての $l \geq L$ について $E[X_1|X_0 = l] \leq l - \epsilon$) が成立するための条件) が隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ が定常分布を有するための条件となる。

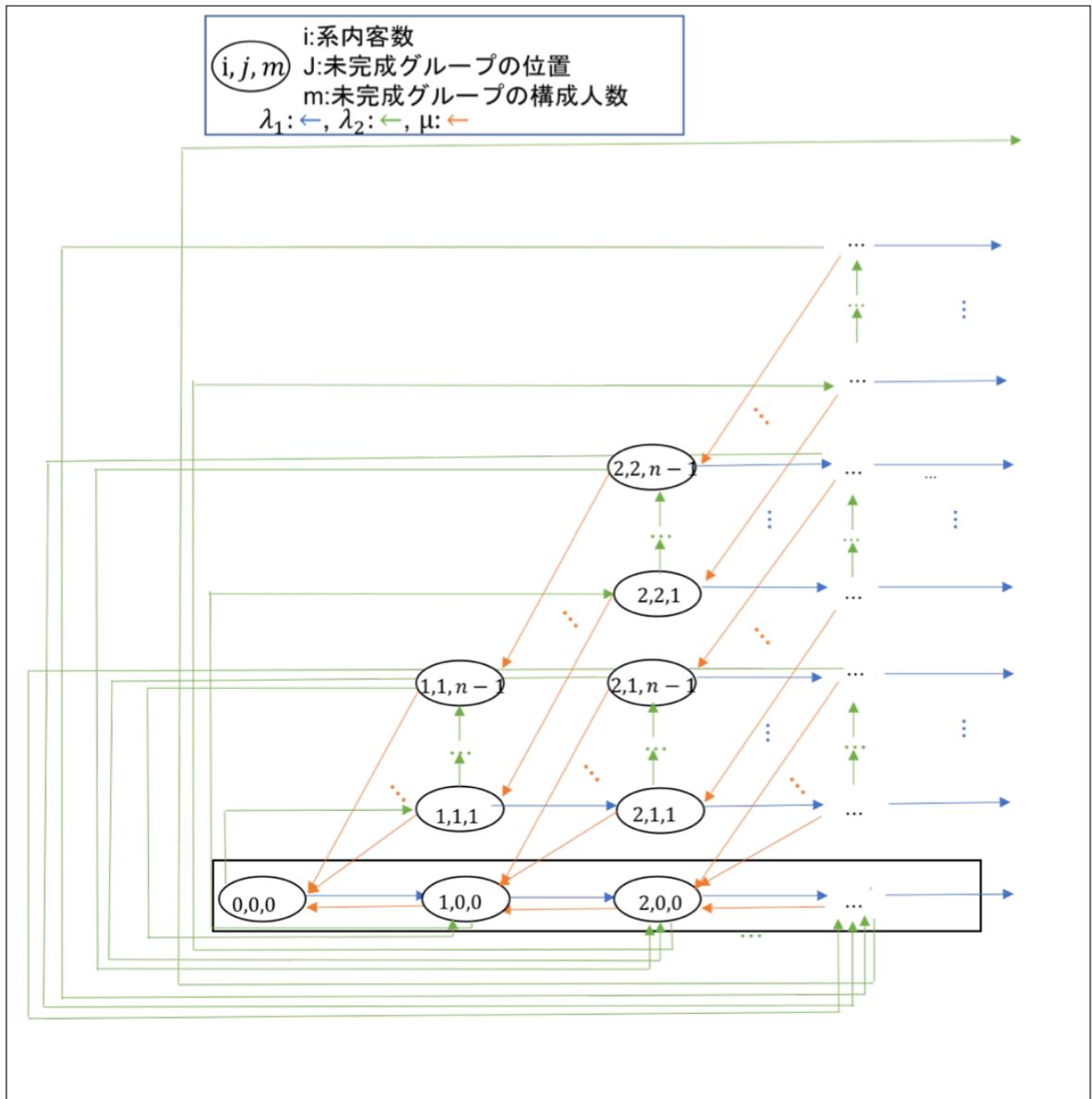


図 4.5 状態遷移図

4.2.2 隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ の安定条件

具体的な流れ

まず、0番目のグループ先頭客が到着した時点での系内客数 l である時の、1番目のグループ先頭客が到着した時点での平均系内客数 $E[X_1|X_0 = l]$ と 0番目のグループ先頭客が到着した時点での系内客数 l の関係式を作り、次に、関係式がフォスターの定理に適用されるための条件を考える。

$E[X_1|X_0 = l]$ と l の関係式

まず、モデルから $E[X_1|X_0 = l]$ と l の関係式を作る。 T_i, A_0^1, A_0^2, D_0 を以下のように定義する。

- T_i : i 番目のグループ先頭客の到着時刻.
- A_0^1 : $(T_0, T_1]$ 間のタイプ 1 の到着客数.
- A_0^2 : $(T_0, T_1]$ 間のタイプ 2 の到着客数.
- D_0 : $(T_0, T_1]$ 間のタイプ 1 とタイプ 2 をあわせた退去客数 (タイプ 2 の客はグループ全体で 1 人とみなす).

以上の定義から式 (4.53) が成立する.

$$E[X_1|X_0 = l] - l = E[A_0^1|X_0 = l] - E[D_0|X_0 = l] + 1. \quad (4.53)$$

$A_0^2 \leq n$ および $E[A_0^1|X_0 = l, A_0^2 < n] \leq E[A_0^1|X_0 = l, A_0^2 = n]$ であることより式 (4.54) が成立する.

$$\begin{aligned} E[A_0^1|X_0 = l] &= E[A_0^1|X_0 = l, A_0^2 = n]p(A_0^2 = n) + E[A_0^1|X_0 = l, A_0^2 < n]p(A_0^2 < n) \\ &\leq E[A_0^1|X_0 = l, A_0^2 = n]p(A_0^2 = n) + E[A_0^1|X_0 = l, A_0^2 = n]p(A_0^2 < n) \\ &= E[A_0^1|X_0 = l, A_0^2 = n] = \frac{n\lambda_1}{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

次に、 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^c$ を以下のように定義する.

- \mathcal{A} : 0番目のグループ先頭客が時刻 T_1 においても系内に存在する事象.
- \mathcal{A}^c : 0番目のグループ先頭客が時刻 T_1 においても系内に存在しない事象.

以上の定義から式 (4.55) が成立する.

$$E[D_0|X_0 = l] = E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}]p(\mathcal{A}) + E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}^c]p(\mathcal{A}^c). \quad (4.55)$$

式 (4.55) の右辺第一項 ($E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}]p(\mathcal{A})$), 第二項 ($E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}^c]p(\mathcal{A}^c)$) は共に 0 以上であるので、式 (4.56) が成立する.

$$\begin{aligned} E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}]p(\mathcal{A}) &= E[D_0|X_0 = l] - E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}^c]p(\mathcal{A}^c) \\ &\leq E[D_0|X_0 = l]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

式 (4.53),(4.54),(4.56) より、次の式 (4.57) が成立する.

$$E[X_1|X_0 = l] - l \leq \frac{n\lambda_1}{\lambda_2} - E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}]p(\mathcal{A}) + 1 \quad (4.57)$$

式 (4.57) の右辺 $E[D_0|X_0 = l, \mathcal{A}]p(\mathcal{A})$ について考える。 \tilde{T}_n を以下のように定義する.

- $\tilde{T}_n : (T_0, \tilde{T}_n]$ 間にタイプ 2 が n 人到着する」ような時刻.

また, 事象 \mathcal{A} が起きた場合, $(T_0, T_1]$ 間にタイプ 2 が n 人到着するので, $\tilde{T}_n = T_1$ となることから, 式 (4.58) が導出される.

$$\begin{aligned} E[\tilde{T}_n - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}] p(\mathcal{A}) &= E[\tilde{T}_n - T_0 | X_0 = l] - E[\tilde{T}_n - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) \\ &= \frac{n}{\lambda_2} - E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c). \end{aligned} \quad (4.58)$$

以下の式が成立する.

$$E[D_0 | X_0 = l, \mathcal{A}] = \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}] \quad (4.59)$$

式 (4.58), (4.59) より式 (4.57) は以下のように書き下すことができる.

$$\begin{aligned} E[X_1 | X_0 = l] - l &\leq \frac{n\lambda_1}{\lambda_2} - E[D_0 | X_0 = l, \mathcal{A}] p(\mathcal{A}) + 1 \\ &= \frac{n\lambda_1}{\lambda_2} - \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}] p(\mathcal{A}) + 1 \\ &= \frac{n\lambda_1}{\lambda_2} - \mu \left(\frac{n}{\lambda_2} - E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) \right) + 1 \\ &= -\frac{n\mu}{\lambda_2} \left(1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{n} \right) + \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) \end{aligned} \quad (4.60)$$

例えば, 最大相乗り人数が 2 人の場合の, 事象 \mathcal{A} のが起きたときの隠れマルコフ点での客の待ち行列の様子例は図 4.6 に表されている.

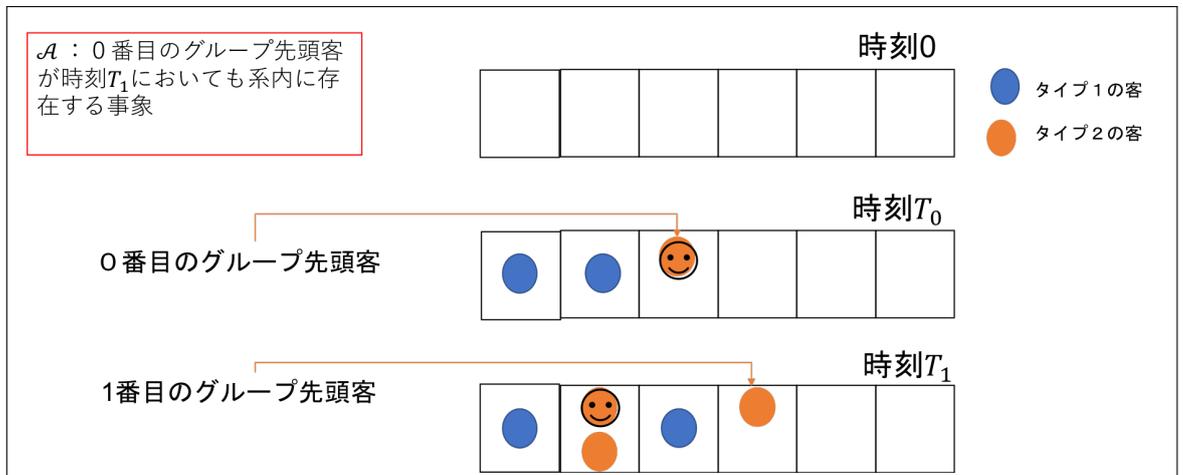


図 4.6 最大相乗り人数が 2 人の場合の, 事象 \mathcal{A} のが起きたときの隠れマルコフ点での客の待ち行列の様子例

フォスターの定理の適用されるための条件

フォスターの定理が適用されるための条件は, $L \geq 0$ および $\epsilon > 0$ が存在し, 全ての $l \geq L$ について

$$-\frac{n\mu}{\lambda_2} \left(1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{n} \right) + \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) = -\epsilon$$

であるための条件であると言い換えることができる.

この適用されるための条件が, 「隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ が定常分布を有する」ための条件であり, $\mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) > 0$, $\frac{n\mu}{\lambda_2} > 0$ であるので, $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} \geq 1$ とすると適用されないことは明らかである.

以下 $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$ であると仮定した時の $\mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c)$ について考える.

ここで, t, A_0^{2*}, r_m を以下のように定義する.

- t : タイプ 1 とタイプ 2 をあわせた退去客 (タイプ 2 の客はグループ全体で 1 人とみなす) の l 人目の退去時刻.
- A_0^{2*} : $(T_0, t]$ 間のタイプ 2 の到着客数.
- r_m : $A_0^{2*} = m (m \geq 0)$ となる確率.

時刻 t は図 4.7 のタイプ 2 の客の退去時刻となっている.

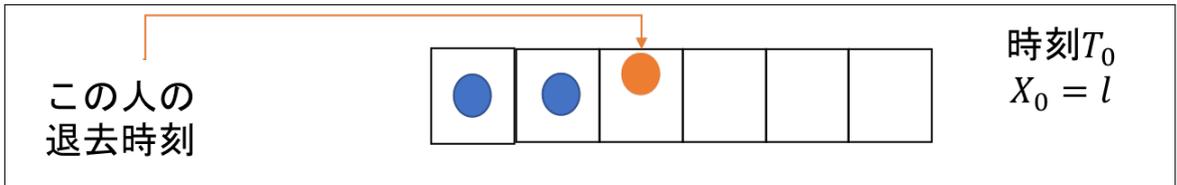


図 4.7 時刻 t

例えば, 最大相乗り人数が 2 人の場合の時刻ごとの客の待ち行列の様子の例は図 4.8 に表されている.

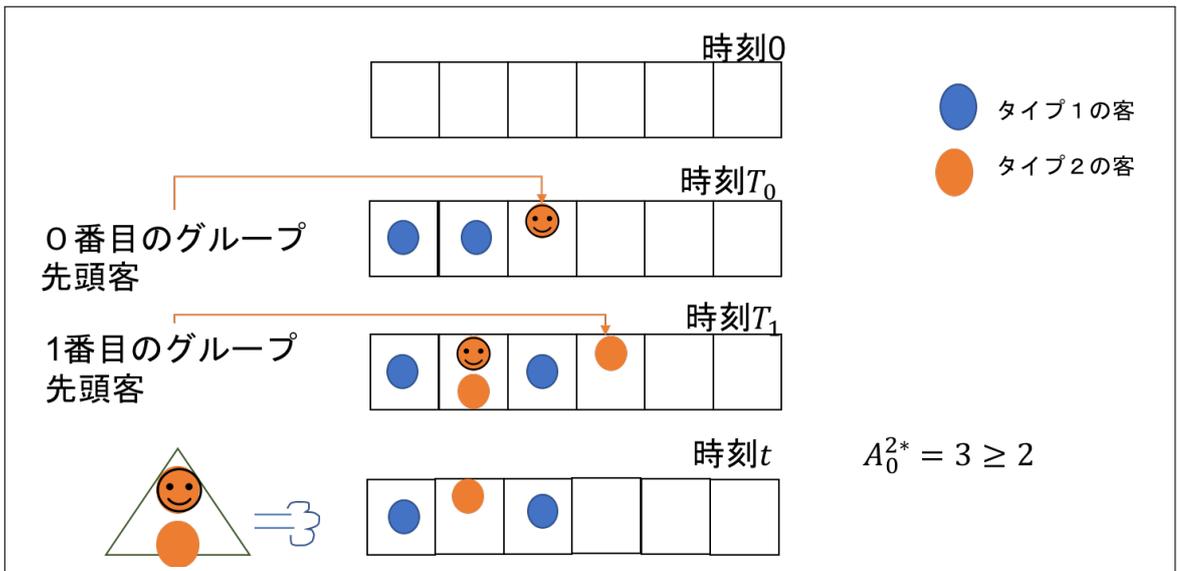


図 4.8 時刻ごとの客の待ち行列の様子

r_m は以下の式 (4.61) ように書き下すことができる.

$$\begin{aligned}
 r_m &= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \frac{(\lambda_2 x)^m}{m!} dF(x) \quad (F(x) \text{ は } l \text{ 次アーラン分布}) \\
 &= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \frac{(\lambda_2 x)^m}{m!} e^{-\mu x} \frac{\mu(\mu x)^{l-1}}{(l-1)!} dx \\
 &= \frac{(\lambda_2)^m (\mu)^{l-1}}{(m)!(l-1)!} \int_0^\infty x^{m+l-1} e^{-(\mu+\lambda_2)x} dx \\
 &= \left(\frac{\lambda_2}{\mu+\lambda_2}\right)^m \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_2}\right)^{l-1} \binom{m+l-1}{m} \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

$A_0^{2*} \geq n$ は、0 番目のグループ先頭客が時刻 T_1 においても系内に存在する（事象 A）ことと同値であるので、式 (4.62),(4.63) が導出される。

$$p(A_0^{2*} \geq n) = p(\mathcal{A}) = \sum_{m=n}^{\infty} r_m \quad (4.62)$$

$$p(A_0^{2*} < n) = p(\mathcal{A}^c) = \sum_{m=0}^{n-1} r_m \quad (4.63)$$

$\delta = \frac{n\mu}{\lambda_2}(1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{n})$ とする。 $\frac{\mu}{\mu + \lambda_2} < 1$ であり、 l が十分に大きいときは $\binom{m+l-1}{m} \leq \binom{n+l-1}{n-1} = O(n^{-1})$ であることから、 L を十分大きくとれば、全ての $l \geq L$ に対して、以下の式 (4.64) が導出される。

$$\begin{aligned} \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) &= \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda_2}{\mu + \lambda_2}\right)^m \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_2}\right)^{l-1} \binom{m+l-1}{m} \\ &\leq \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

(4.64) より、 L を十分大きくとれば、全ての $l \geq L$ に対して、以下の式 (4.65) が成立する。

$$-\frac{n\mu}{\lambda_2}(1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{n}) + \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) \leq -\frac{\delta}{2} \quad (4.65)$$

よって、 $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$ と仮定した時に、 L を十分大きくとれば、 $L \geq 0$ および $\epsilon > 0$ が存在し、全ての $l \geq L$ について

$$-\frac{n\mu}{\lambda_2}(1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{n}) + \mu E[T_1 - T_0 | X_0 = l, \mathcal{A}^c] p(\mathcal{A}^c) = -\epsilon$$

であると言い換えることができる。

したがって、 $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$ であるとき、 $L \geq 0$ および $\epsilon > 0$ が存在し、全ての $l \geq L$ について

$$E[X_1 | X_0 = l] \leq l - \epsilon,$$

が成立する。このフォスターの定理が適用されるための条件 ($\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$) が、「隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ が定常分布を有する」ための条件である。

4.2.3 通常モデルの安定条件

ある k 番目の隠れマルコフ点と $k+1$ 番目の隠れマルコフ点の間では、系内客数は発散することはないので、すなわち、「隠れマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ が定常分布を有する」と、通常モデルは安定すると言える。

第 5 章

数値計算

5.1 数値計算モデル

通常モデルでは客の待ち室の容量は無限であるが、数値計算では客の待ち室の容量を有限の値 l 人とする。また、通常モデルでは最大相乗り人数を n 人（完成グループの構成人数を任意の n ）としているが、数値計算では最大相乗り人数を 3 人で相乗りする場合（ $n = 3$ ）の場合の解析を行う。

解析を行うモデルの状態遷移図は図 5.1 のように描くことができる。大域平衡方程式 (5.1)~(5.14) は以下のように書き下すことができる。

$i = 0$ のとき

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{0,0,0} + \mu(\pi_{1,0,0} + \pi_{1,1,1} + \pi_{1,1,2}) = 0 \quad (5.1)$$

$i = 1$ のとき

$$\lambda_1\pi_{0,0,0} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{1,0,0} + \lambda_2\pi_{1,1,2} + \mu\pi_{2,0,0} + \mu\pi_{2,1,1} + \mu\pi_{2,1,2} = 0 \quad (5.2)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{1,1,1} + \lambda_2\pi_{0,0,0} + \mu\pi_{2,2,1} = 0 \quad (5.3)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{1,1,2} + \lambda_2\pi_{1,1,1} + \mu\pi_{2,2,2} = 0 \quad (5.4)$$

$i = 2 \dots l-1$ のとき

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{i,0,0} + \lambda_1\pi_{i-1,0,0} + \mu\pi_{i+1,0,0} + \mu\pi_{i+1,1,1} + \mu\pi_{i+1,1,2} + \lambda_2\pi_{i,k,2} = 0 \quad k = 1, 2 \dots i \quad (5.5)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{i,k,1} + \lambda_1\pi_{i-1,k,1} + \mu\pi_{i+1,k+1,1} = 0 \quad k = 1, 2 \dots i-1 \quad (5.6)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{i,k,2} + \lambda_1\pi_{i-1,k,2} + \lambda_2\pi_{i,k,1} + \mu\pi_{i+1,k+1,2} = 0 \quad k = 1, 2 \dots i-1 \quad (5.7)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{i,i,1} + \lambda_2\pi_{i-1,0,0} + \mu\pi_{i+1,i+1,1} = 0 \quad (5.8)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\pi_{i,i,2} + \lambda_2\pi_{i,i,1} + \mu\pi_{i+1,i+1,2} = 0 \quad (5.9)$$

$i = l$ のとき

$$-\mu\pi_{l,0,0} + \lambda_1\pi_{l-1,0,0} + \lambda_2\pi_{l,k,2} = 0 \quad k = 1, 2 \dots l \quad (5.10)$$

$$-(\lambda_2 + \mu)\pi_{l,k,1} + \lambda_1\pi_{l-1,k,1} = 0 \quad k = 1, 2 \dots l-1 \quad (5.11)$$

$$-(\lambda_2 + \mu)\pi_{l,k,2} + \lambda_1\pi_{l-1,k,2} + \lambda_2\pi_{l,k,1} = 0 \quad k = 1, 2 \dots l-1 \quad (5.12)$$

$$-(\lambda_2 + \mu)\pi_{l,l,1} + \lambda_2\pi_{l-1,0,0} = 0 \quad (5.13)$$

$$-(\lambda_2 + \mu)\pi_{l,l,2} + \lambda_2\pi_{l,l,1} = 0 \quad (5.14)$$

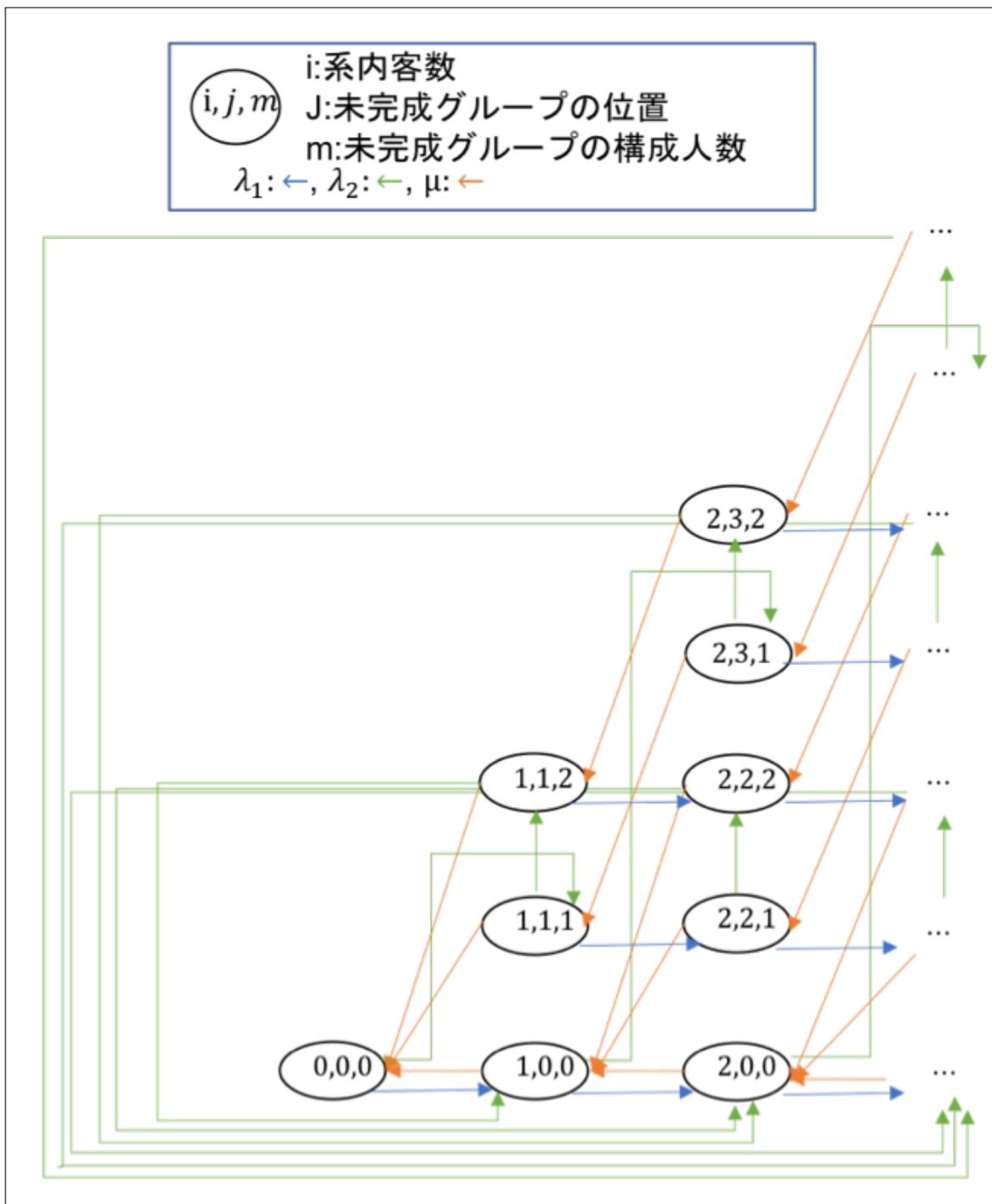


図 5.1 状態遷移図

大域平行方程式 (5.1)~(5.14) に確率の総和が 1 であることを表した式 (5.15) を加えた連立方程式を解くことで $\pi_{i,j}$ を算出する。本論文ではこれらの連立方程式をプログラムで解析して各種数値を算出している。

$$\pi_{0,0,0} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^i (\pi_{i,j,1} + \pi_{i,j,2}) = 1 \quad (5.15)$$

5.2 数値の算出

定常分布

定常分布 π_i を式 (5.16) のように定義する。

$$\begin{cases} \pi_0 &= \pi_{0,0,0} \\ \pi_i &= \sum_{j=1}^i (\pi_{i,j,1} + \pi_{i,j,2}) \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.16)$$

客の平均系内容数

式 (5.16) を用いると、客の平均系内容数 L は式 (5.17) のように導出される。

$$L = \sum_{i=0}^l i\pi_i \quad (5.17)$$

タイプ 1 の客の平均待ち時間

タイプ 1 の客の平均待ち時間 W_1 は式 (5.18) のように導出される。

$$W_1 = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{i+1}{\mu} \pi_i \quad (5.18)$$

タイプ 2 の客の平均待ち時間

1. 待ち行列内にタイプ 2 の未完成グループがない場合

この場合のタイプ 2 の客の平均待ち時間 W_{2A} は式 (5.19) のように導出される。

$$W_{2A} = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{i+1}{\mu} \pi_{i,0,0} \quad (5.19)$$

2. 待ち行列内にタイプ 2 の未完成グループがある場合

システムに到着したタイプ 2 の客は j 番目に並ぶので、この場合のタイプ 2 の乗客の平均待ち時間を W_{2B} は式 (5.20) のように導出される。このとき、待ち行列に並んでいる乗客が l 人であったとしても待ち行列に加わることが可能である。

$$W_{2B} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^i \frac{j}{\mu} (\pi_{i,j,1} + \pi_{i,j,2}) \quad (5.20)$$

よってタイプ 2 の乗客の平均待ち時間 W_2 は式 (5.19),(5.20) を足し合わせた式 (5.21) のように導出される。

$$\begin{aligned} W_2 &= W_{2A} + W_{2B} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \frac{i+1}{\mu} \pi_{i,0,0} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^i \frac{j}{\mu} (\pi_{i,j,1} + \pi_{i,j,2}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.3 解析結果・考察

モデルの様々なケースを想定し大域平衡方程式の解析を用いてこのモデルの特徴を調べていく。

5.3.1 安定条件との関係

4章より、最大相乗り人数が3人の場合の、安定条件（待ち行列に無限に並ぶことができるとき、系内が発散しないための条件）は $\rho_1 + \frac{\rho_2}{3} < 1$ であることがわかっている。

$\rho_1 + \frac{\rho_2}{3}$ についての解析

まず、パラメータはタクシーの到着率 μ を 4/5 (台/分)、客の待ち室の容量 l を 100 (人) で固定する。タイプ1の客の到着率 λ_1 と (人/分) タイプ2の客の到着率 λ_2 の比率を 1:1 で固定、2:1 で固定 1:2 で固定の3パターン用意する。 λ_1, λ_2 を変化させることで、安定条件の式の左辺 ($\rho_1 + \frac{\rho_2}{3}$) の値を変化させ、平均系内客数にどのような変化を及ぼすかを見ていく。

図 5.2 がそれぞれのパターンの平均系内客数の推移についてまとめた図、図 5.3 がそれぞれのパターンのタイプ1の客の平均待ち時間の推移についてまとめた図、図 5.4 がそれぞれのパターンのタイプ2の客の平均待ち時間の推移についてまとめた図である。

概ね平均系内客数の推移の線は一致しており、それぞれのパターンで大きな誤差はないことから、安定条件はタイプ1の客の到着率 λ_1 とタイプ2の客の到着率 λ_2 の比率によらず $\rho_1 + \frac{\rho_2}{3}$ の値の変化によるものによることが確認できた。

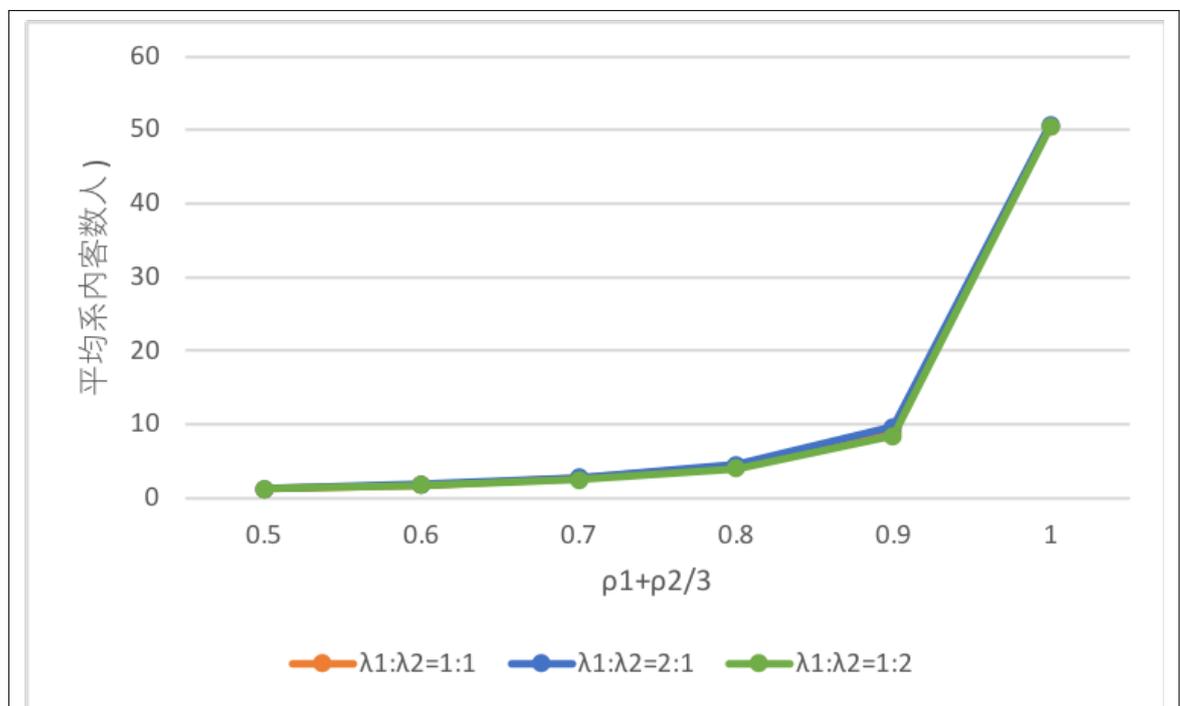


図 5.2 それぞれのパターンの平均系内客数の推移

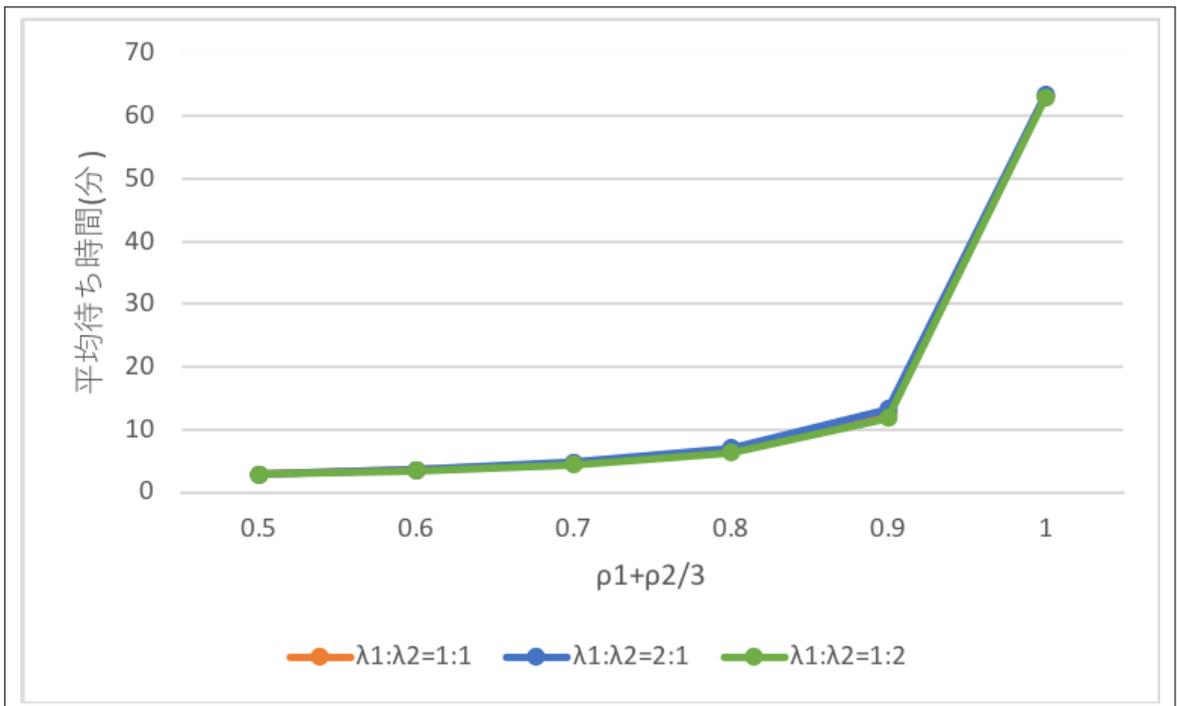


図 5.3 それぞれのパターンのタイプ 1 の客の平均待ち時間の推移

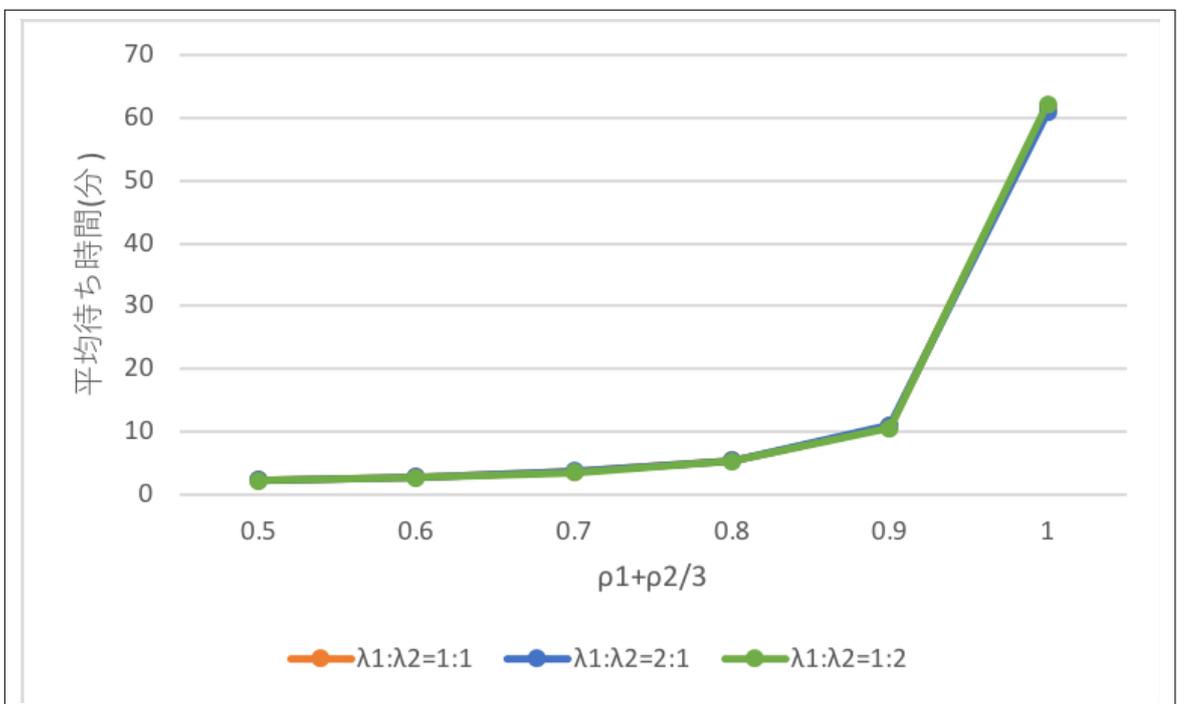


図 5.4 それぞれのパターンのときのタイプ 2 の客の平均待ち時間の推移

客の待ち室の容量についての解析

パラメータはタクシーの到着率 μ を $4/5$ (台/分), タイプ1の客の到着率 λ_1 (人/分) タイプ2の客の到着率 λ_2 (人/分) の比率を $1:1$ で固定する. 客の待ち室の容量 l を $20, 50, 100$ (人) の3パターン用意する. λ_1, λ_2 を変化させることで, 安定条件の式の左辺 ($\rho_1 + \frac{\rho_2}{3}$) の値を変化させ, 平均系内客数にどのような変化を及ぼすかを見ていく.

客の待ち室の容量が無限の場合, $\rho_1 + \frac{\rho_2}{3} < 1$ が安定条件であるので, $\rho_1 + \frac{\rho_2}{3}$ の値が $0.9 \sim 1$ の時の傾きが一番大きくなると考えられる.

図 5.5 が $l = 20$ のモデル, 図 5.6 が $l = 50$ のモデル, 図 5.7 が $l = 100$ のモデルにおける平均系内客数の推移についてまとめた図である.

客の待ち室の容量を有限に取った場合, $\rho_1 + \frac{\rho_2}{3}$ の値が $0.9 \sim 1$ の時の傾きが一番大きくなり, 平均系内客数が顕著に大きくなるのがわかる. よって, 客の待ち室の容量を有限に取った場合, $\rho_1 + \frac{\rho_2}{3} < 1$ が系内客数が急激に増えないための条件となることがわかる.

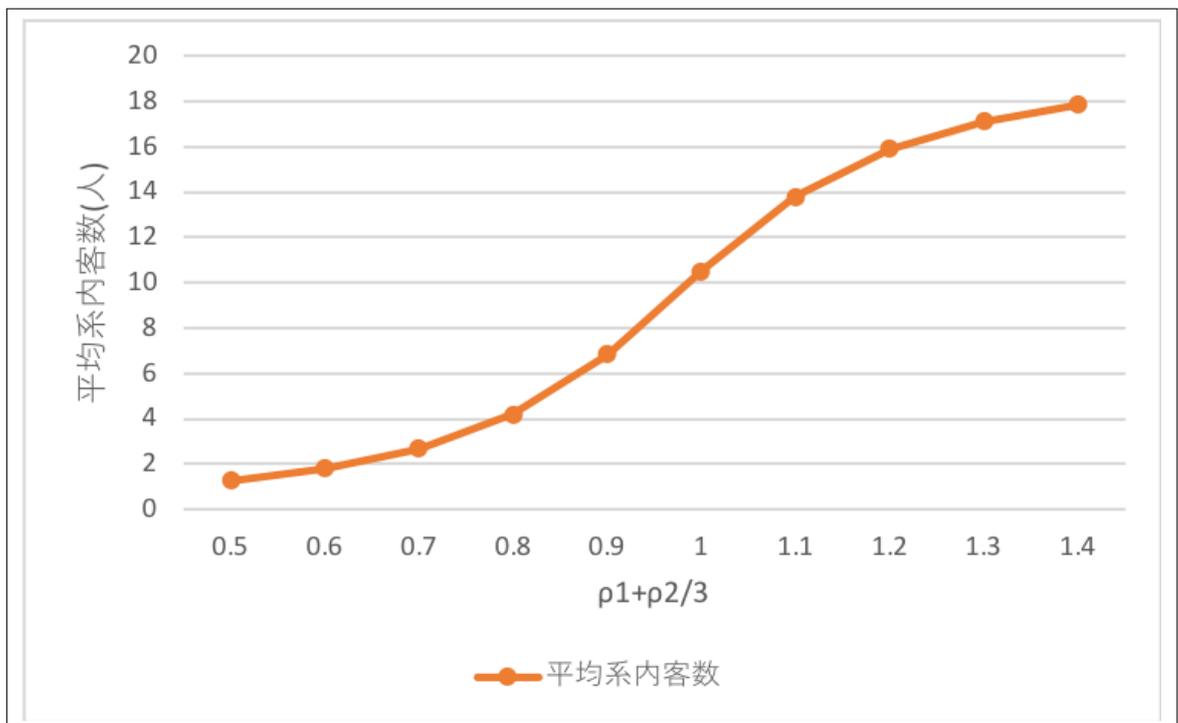


図 5.5 $l = 20$ における平均系内客数の推移

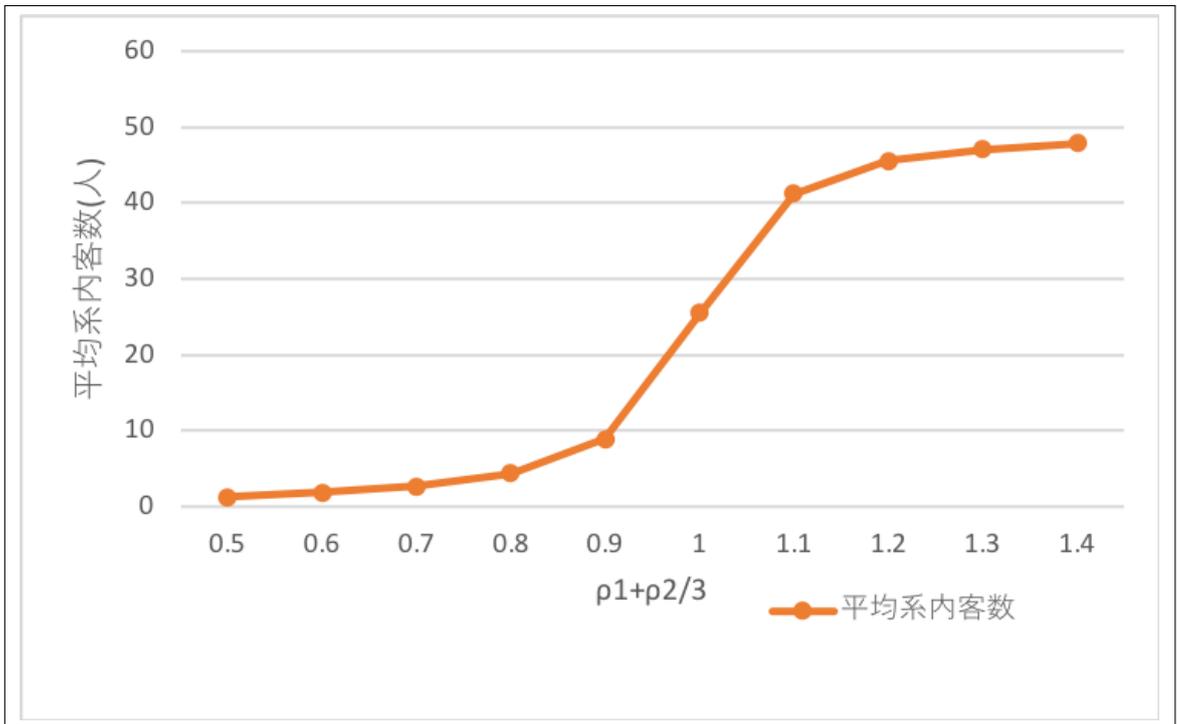


図 5.6 $l = 50$ における平均系内容数の推移

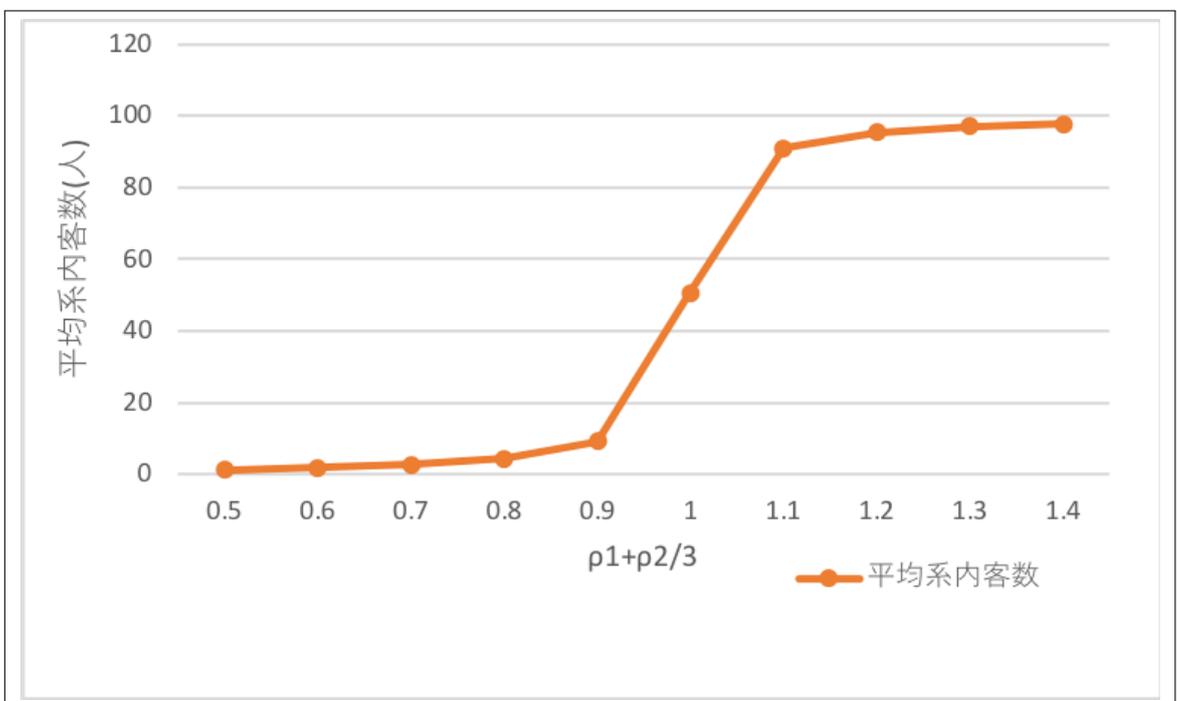


図 5.7 $l = 100$ における平均系内容数の推移

5.3.2 相乗り人数による比較

最大相乗り人数が2人の場合と最大相乗り人数が3人の場合を比較し、相乗り人数を増やすことで、平均系内客数にどのような変化を及ぼすかを見ていく。

パラメータはタクシーの到着率 μ は $4/5$ (台/分)、客の待ち室の容量 l を 100 (人) で固定する。 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ とし、 λ を $3/8, 3/4, 99/125$ の3パターン用意する。それぞれのモデルにおいてタクシー乗り場を訪れるタイプ2の客(相乗りを許容する客)の割合 $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ を変化させ、相乗りを許容する客の割合の変化が客の平均系内客数にどのような変化を及ぼすかを見ていく。

また、図5.8は $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (3/8, 4/5)$ 図5.9は $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (3/4, 4/5)$ 図5.10は $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (99/125, 4/5)$ のモデルにおける平均系内客数の推移の比較を示している。

全体の客の到着率 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ が大きいほど効果が得られることがわかったが、最大相乗り人数を2人から3人に増やしても、平均系内客数の減少にはあまりつながらなかったことがわかった。

例えば、一番大きい効果が得られたのは、 $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (99/125, 4/5)$ のモデルで、相乗りを許容する乗客が全体の1割のとき、最大相乗り人数が2人のモデルの平均系内客数 16.728 人に対して最大相乗り人数が3人のモデルの平均系内客数が 13.89 人となる。

最大相乗り人数を2人から3人にしても効果があまり無いことがわかったので、客にとっては2人相乗りでタクシーに乗った方がタクシーをより快適に過ごすことができるので、2人相乗りを進めたい。

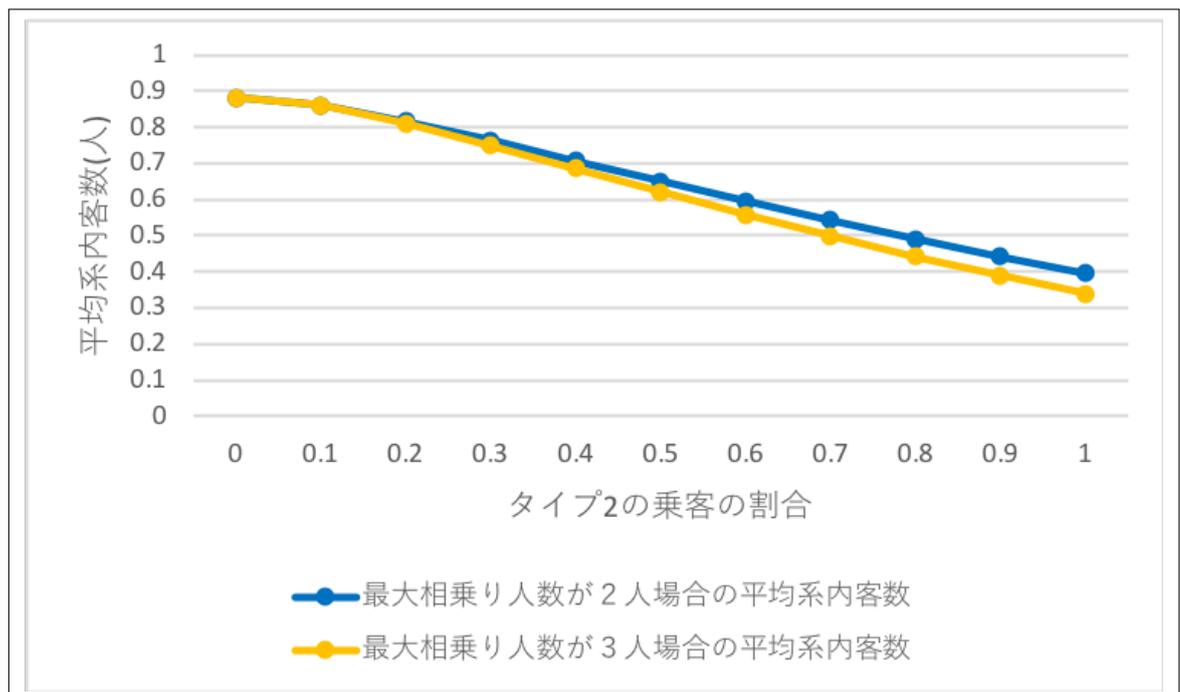


図5.8 $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (3/8, 4/5)$ におけるそれぞれのモデルの平均系内客数の推移

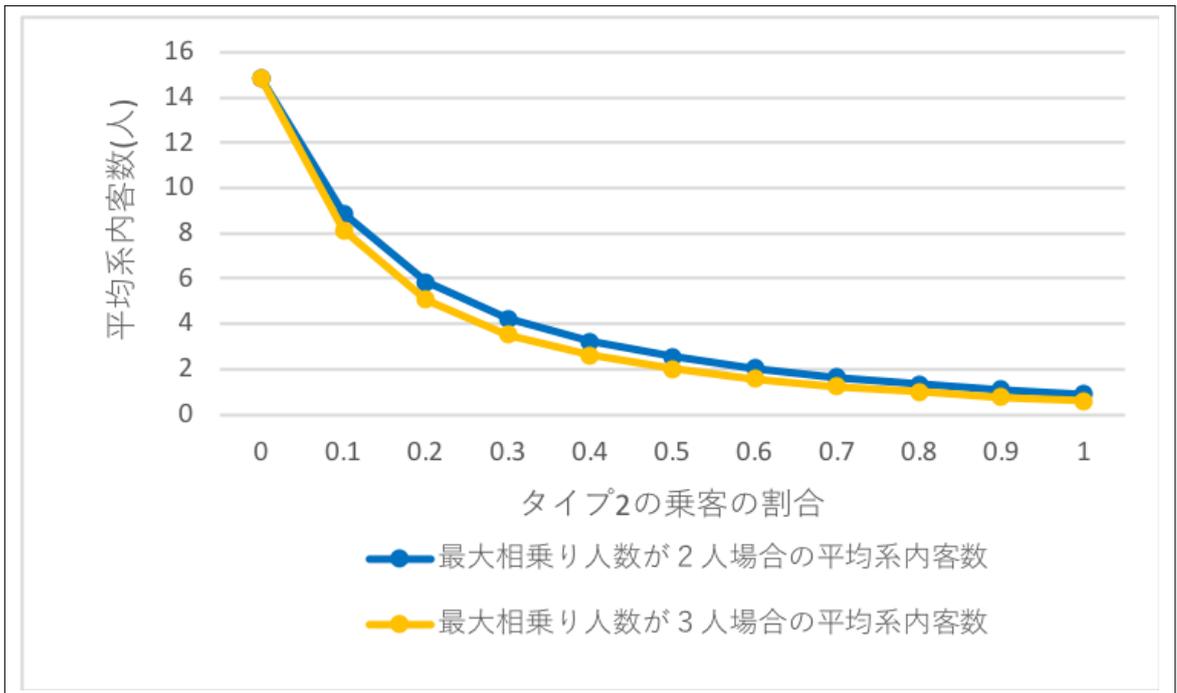


図 5.9 $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (3/4, 4/5)$ におけるそれぞれのモデルの平均系内客数の推移

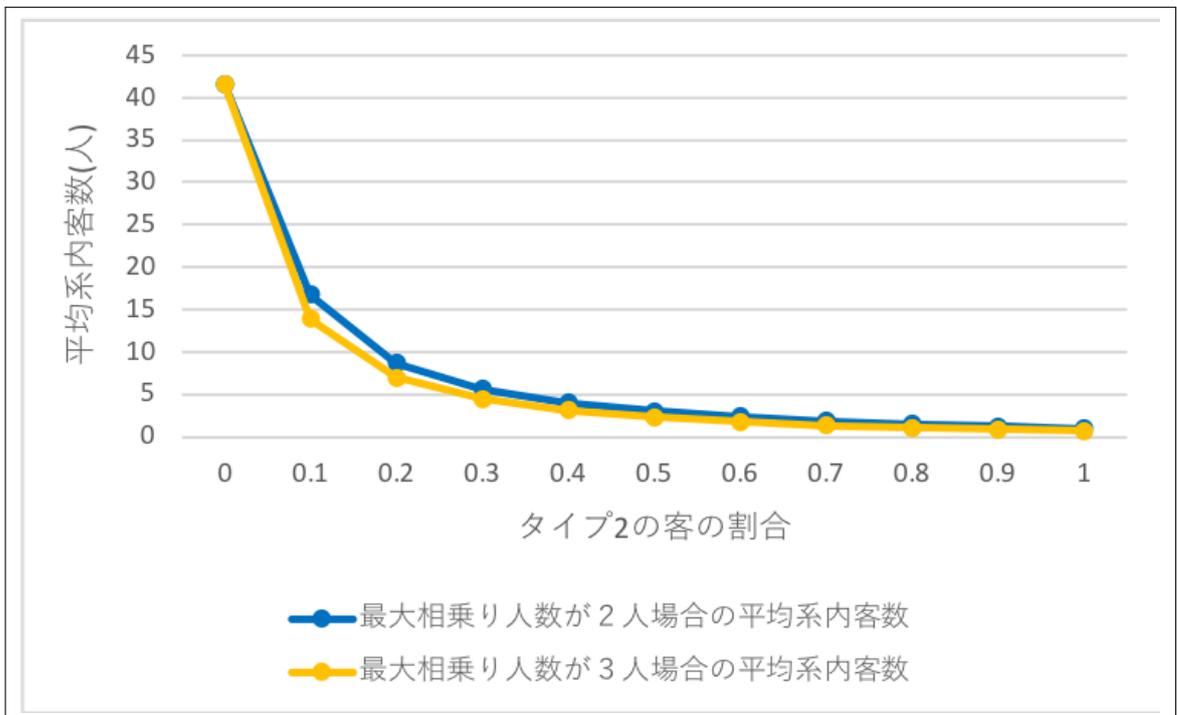


図 5.10 $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu) = (99/125, 4/5)$ におけるそれぞれのモデルの平均系内客数の推移

第 6 章

結論

本研究では、通常モデル（相乗りを考慮したタクシー乗り場での客の待ち行列モデル）の安定条件が $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$ であることがわかった。ドリフト条件を用いて導出した場合は定常分布が存在することを仮定しなければならなかったが、フォスターの定理を用いて導出した場合は定常分布が存在することを仮定せずとも安定条件の導出ができ、なおかつ通常モデルの安定条件を直接的に導出することができるので正確な計算方法だと言える。

また、最大相乗り人数が 3 人の場合、客の待ち室の容量を有限に取ったとき、 $\rho_1 + \frac{\rho_2}{3} < 1$ が系内客数が急激に増えないための条件となることがわかった。このことから、最大相乗り人数が n 人の場合、客の待ち室の容量を有限に取ったとき、 $\rho_1 + \frac{\rho_2}{n} < 1$ が系内客数が急激に増えないための条件となることが推測されるが、今後確かめていく所存である。

そして、G/G/1 モデルを元にした相乗りを考慮するタクシー乗り場のモデルの解析を今後の課題としたい。

謝辞

本論文作成にあたり，指導教員である塩田茂雄先生には多大にご協力いただきました。深く感謝申し上げます。また，塩田研究室一同の皆様に関しましても常日頃お世話になり，そのうえで本論文が完成いたしました。深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 塩田茂雄, 松尾容典, ”客のペアリングのある待ち行列の安定条件”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 2-D-5, 2018.
- [2] 塩田茂雄, 河西憲一, 豊泉洋, 会田雅樹, 待ち行列理論の基礎とその応用, 共立出版, 2014. 川島幸之助 (監修) .
- [3] 宮沢政清. 待ち行列の数理とその応用, 牧野書店, 2013.
- [4] 松尾容典, 鶴見星花, 塩田茂雄, ”客のグルーピングのある待ち行列の安定条件”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 秋季研究発表会, 1-C-10, 2018.
- [5] 松尾容典, 鶴見星花, 塩田茂雄, ”客のグルーピングのある待ち行列の安定条件：ドリフト条件による導出,” 2018 年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」,2019.
- [6] 松尾容典, 鶴見星花, 塩田茂雄, ”相乗りを考慮したタクシー乗り場の待ち行列 モデル,” 第一回 QoS に関する (名大, NII, 早稲田大, 電通大, 芝浦工大, 千葉大合同) 学生技術交流会, 2018.
- [7] 鶴見星花, 松尾容典, 塩田茂雄, ”客のグルーピングのある待ち行列の安定条件:Foster の定理による導出,” 2018 年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」,2019.