

平成30年度 卒業論文

短期貸出客を優先処理する
図書館の貸出図書待ち行列

学籍番号 15T0288W

白木 詩乃

指導教員：塩田茂雄教授

平成31年2月4日

目次

第1章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	待ち行列理論を用いた図書館への応用研究	2
1.3	研究目的	2
1.4	本論文の構成	2
第2章	待ち行列理論	3
2.1	待ち行列理論の概要	3
2.2	出生死滅過程による待ち行列モデルの解析	5
2.3	準出生死滅過程による待ち行列モデル	10
第3章	短期貸出客を優先処理する図書館の貸出図書の待ち行列モデル	14
3.1	提案モデル	14
3.2	提案モデルにおけるサービス規律	15
第4章	シミュレーション	18
4.1	シミュレーション条件	18
4.2	シミュレーション結果	20
第5章	モデルの解析	23
5.1	$M/H_2/N$ モデルの安定条件	23
5.2	準出生死滅過程を用いた解析	27
第6章	結論	29
6.1	まとめ	29
6.2	今後の展望	29
	謝辞	30
	参考文献	31

第1章

序論

1.1 研究背景

公共図書館における貸出予約件数は年々増加している。特にベストセラー本に対する予約が集中し、大きな図書館では1つのタイトルに数百件の予約がつくなど、これまでにない予約件数が数えられるようになった [1]。

このように貸出予約件数が膨大となる問題に対して公共図書館が行っている対策として、同じタイトルの本を複数冊所蔵する複本が挙げられる。しかし新刊のベストセラーの本は数年経つと発売直後と比べ利用回数が減ってしまう。また図書館の資料購入費には限りがあるため、なるべく同じタイトルの本は購入したくないという意見もある。千葉市の公共図書館における貸出予約件数ベスト1の“蜜蜂と遠雷”という図書は2018年10月17日の時点で所蔵冊数49冊に対し、予約件数は1,040件となっていた [2]。千葉市の公共図書館の貸出期間は2週間が限度であるため、この状態から利用者が予約を入れると、1年ほど待つ可能性がある。2018年10月17日時点の予約状況を図1.1に示す。



The screenshot shows the Chiba City Library Online Catalog interface. The search results for the book "Bee and Thunder" (蜜蜂と遠雷) are displayed. The book cover is shown on the left, and the details are on the right.

蔵書情報		
所蔵数	49	在庫数 0 予約数 1040

書誌情報サマリ	
書名	蜜蜂と遠雷
著者名	恩田 陸/著
著者名コミ	オンダ リク
出版社	幻冬舎
出版年月	2016.9

図1.1 千葉市図書館貸出予約件数ベスト1 蜜蜂と遠雷[2].

1.2 待ち行列理論を用いた図書館への応用研究

待ち行列理論を図書館へ応用した研究は下記の二つなどが挙げられる。蔵書評価のための指標の一つとして複本購入に関する待ち行列モデルを論じた岸田ら [3], 大学図書館における移動周密書庫の効能評価のためにサービス位置を要求する客の待ち行列モデルを提案した加藤ら [4]などがある。

1.3 研究目的

本研究では、貸出図書の予約待ちの現象を所蔵冊数を窓口数、予約件数を待ち行列長とする待ち行列でモデル化する。待ち行列理論では、サービス時間の短い客からサービスをすると待ち時間が最小になることが知られている [5]。

そこで、短期貸出客に優先的に貸し出す図書を設けることにより利用者全体の平均待ち時間を軽減する方策の有効性について検討する。短期貸出客用の優先図書のあるモデルは、複数の窓口を持ち、サービス時間分布の異なる2種類の客（優先客、非優先客）が到着し、優先客が優先的に使用できる窓口が設けられた待ち行列システムとみなすことができる。本研究では、シミュレーションによりこの待ち行列システムの性能を評価し、短期貸出客に優先的に貸し出す図書を設けることの有効性を定量的に調べることにする。

1.4 本論文の構成

本論文は以下のような構成で論じることとする。第2章では、本研究で必要となる待ち行列理論の概要と、出生死滅過程について述べる。第3章では、短期貸出客を優先処理する図書館の貸出図書の待ち行列モデルと、そのサービス規律について述べる。第4章では、第3章で述べた提案モデルのシミュレーションとその結果について述べる。第5章では、本研究で扱った $M/H_2/N$ モデルの安定条件とその解析について述べる。最後に第6章で、本論文の結論を述べる。

第2章

待ち行列理論

第2章では待ち行列理論の概要および出生死滅課程について [7]に則り述べる.

2.1 待ち行列理論の概要

2.1.1 待ち行列理論とは

待ち行列は, 私たちの生活で身近に見られる現象である. バス乗車のための待ち行列, スーパーマーケットのレジ待ち行列, 通信ネットワークでのデータの送受信の際にルータ内部にできるパケットの待ち行列など様々な待ち行列が存在する. 待ち行列理論の目的は, このような待ち行列を確率的な現象として捉え待ち行列の特性を数理的に分析するための手段を提供することである.

2.1.2 待ち行列のモデル化

待ち行列の特性を数理的に分析するために, 待ち行列に関する各用語を [7]に則り述べる. 人が訪れる動作を到着と呼び, 人が何らかの処理を受ける場所は窓口と呼ばれる. 窓口の数は1つである場合もあれば複数である場合もある. 窓口で受ける, あるいは行う処理はサービスと呼ばれる. 窓口を訪れる人は客と呼ばれるが, 客は必ずしも人である必要はない. また, 行列を作って待つ場所を待ち室と呼ぶ. 現実では待ち室は有限の大きさを持つが, 抽象的な待ち行列モデルでは無限の大きさを持つ待ち室を考えることもある. 待ち室における待ち行列は1列の場合もあれば, 窓口ごとに待ち行列を形成する複数列の場合もある. 最後に, 窓口でサービスを受け終わった客は退出する. 待ち室と窓口を含むシステム全体を待ち行列システムと呼び, 上記の各要素全体を待ち行列モデルと呼ぶ. 待ち行列モデルの概要を図2.1に示す.

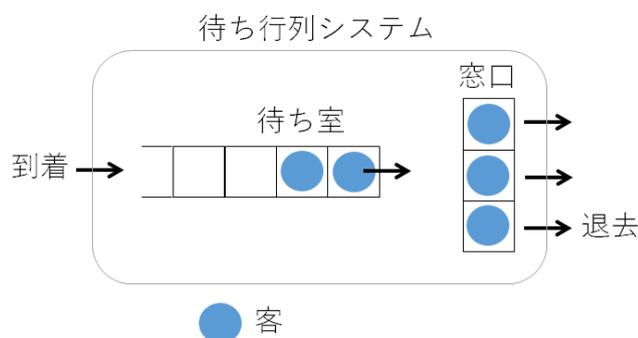


図2.1 待ち行列モデルの概要.

2.1.3 ケンドールの記号

待ち行列モデルは客の到着過程，サービス時間分布，窓口の数，待ち室に収容可能な最大数(待ち室容量)，さらに客の処理方法(サービス規律)の5つで特徴づけることができる．待ち行列理論では，これらの特徴を以下のケンドールの記号により表現する．

$$A/S/c(K)$$

ここで， A には客の到着過程の種類， S にはサービス時間分布の種類， c には窓口の数， K には待ち室容量を表す数字を記載する．サービス規律は $/c(K)$ の後ろに記載するが，先着順サービスを表すFIFO(First In First Out)は通常省略されるため，それ以外のサービス規律を表す際に記載する．

客の到着過程の種類は，到着間隔分布を表す記号で表現する．ポアソン過程では到着間隔は指数分布に従うので， A には M という記号が入る．また，客のサービス時間分布の種類も同様の記号で表現する．客のサービス時間が指数分布に従う場合， S には M という記号が入り，相型分布に従う場合は PH という記号が入る．表2.1にケンドールの記法で用いる到着過程やサービス時間分布を表す記号を示す．

表2.1 ケンドールの記法

記号	到着過程	サービス時間分布
M	ポアソン過程	指数分布
D	到着間隔が一定	サービス時間が一定
E_k	到着間隔が k 次アーラン分布	サービス時間が k 次アーラン分布
H_k	到着間隔が k 次超指数分布	サービス時間が k 次超指数分布
PH	相型再生過程	サービス時間が相型分布
GI	再生過程	一般分布(互いに独立)

2.2 出生死滅過程による待ち行列モデルの解析

時刻 $t \geq 0$ における，系内客数を $X(t)$ で表す．ここで系内客数は非負の整数である．系内客数は確率的に増減するので $\{X(t); t \geq 0\}$ は確率過程として捉えられる．系内客数が $X(t) = i$ であることを状態 i とすると， $\{X(t); t \geq 0\}$ は，現在の系内客数 i が与えられれば，過去の状態にかかわらず未来の系内客数が決まると仮定する．系内客数は一度に1人ずつ到着，あるいは退去するのどちらかであるとする．よって状態 i から遷移できる状態は，状態 $i+1$ か状態 $i-1$ のどちらかに限る．ただし状態 $i=0$ の場合は系内客数がそれ以上退去することは考えず，状態0から状態1にのみ遷移する．

時刻 t は連続的に変化するので，この推移構造を持つ連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t); t \geq 0\}$ を出生死滅過程と呼ぶ．系内客数 $X(t) = i$ であるときの客の到着率を $\lambda_i (i = 0, 1, \dots)$ ，同様に系内客数 $X(t) = i$ であるときの客の退去率を $\mu_i (i = 1, 2, \dots)$ で表す．なお，状態 $i=0$ の場合は $\mu_0 = 0$ であることに注意する．出生死滅過程の状態遷移図を図2.2に示す．

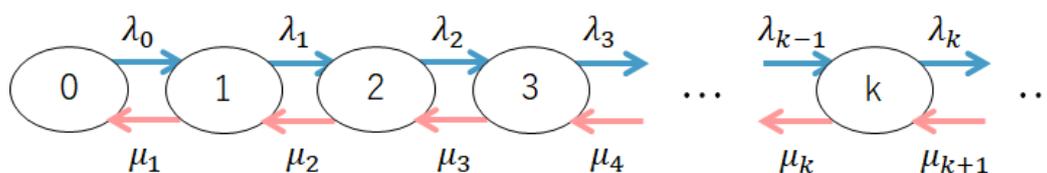


図2.2 出生死滅過程の状態遷移図.

次に図2.2で示した出生死滅過程の状態遷移図より，出生死滅過程の定常分布を導出する手順について述べる．出生死滅過程のシステムが定常であるということは，時刻 t によらず各状態 i が一意に定まるということを意味する．出生死滅過程を表す連続時間マルコフ連鎖が規約で正再帰的であるならば，コルモゴロフの微分方程式より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, j \in S$$

で定まる極限值が存在し，次の方程式を書き下すことができる．

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \quad (j = 0) \tag{2.1}$$

$$(\lambda_j + \mu_j) \pi_j = \lambda_{j-1} \pi_{j-1} + \mu_{j+1} \pi_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots) \tag{2.2}$$

上記の式(2.1)，式(2.2)は大域平衡方程式と呼ばれており，定常状態において状態 i から出る確率フローと状態 i に入っていくフローは等しくなるということを表した方程式である．これらを $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ まで両辺を足し合わせると詳細平衡方程式と呼ばれる式(2.3)が導出される．

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 \\
(\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 &= \lambda_0 \pi_0 + \mu_2 \pi_2 \\
(\lambda_2 + \mu_2) \pi_2 &= \lambda_1 \pi_1 + \mu_3 \pi_3 \\
(\lambda_3 + \mu_3) \pi_3 &= \lambda_2 \pi_2 + \mu_4 \pi_4 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
+ \frac{(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) \pi_{n-1} &= \lambda_{n-2} \pi_{n-2} + \mu_n \pi_n}{\lambda_{n-1} \pi_{n-1} = \mu_n \pi_n}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$n = j$ とおき, すべての $j \geq 1$ について, $\mu_j > 0$ だと仮定すると, 式(2.3)より

$$\lambda_{j-1} \pi_{j-1} = \mu_j \pi_j, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

が構成できる. ここで, 両辺を μ_j で割ると π_j を次のように構成できる.

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \pi_{j-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \pi_0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

確率の和が1なので正規化条件 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ を課す.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \pi_0 = 1$$

以上より式(2.4)が導出される.

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \right]^{-1} \tag{2.4}$$

定常状態が存在するためには, π_0 が有限の値に収束することが条件である.

2.2.1 $M/M/1$ 待ち行列

本節では, 出生死滅過程で記述できる基本的な待ち行列モデルである $M/M/1$ モデルについて述べる. $M/M/1$ モデルとは, 客の到着過程がポアソン過程であり, サービス時間が指数分布に従い, 窓口が1つであり, 待ち室容量が無限大である待ち行列システムのモデルである. 客の到着過程であるポアソン過程の到着率を $\lambda > 0$, 客のサービス時間を特徴づける指数分布のパラメータを $\mu > 0$ とする. μ はサービスの速さを表すサービス率とも呼ばれ, 前節では退去率として説明したものと同様である.

$M/M/1$ モデルは出生死滅過程で記述することができる. 式(2.1)および式(2.2)の大域平衡方程式において, 任意の $i \geq 0$ に対して到着率 $\lambda_i = \lambda$ であり, 任意の $i \geq 1$ に対して $\mu_i = \mu$ としたものが $M/M/1$ モデルである. $M/M/1$ モデルの状態遷移図を図2.3に示す.

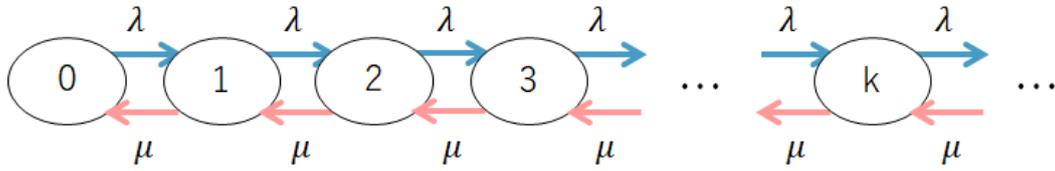


図2.3 M/M/1モデルの状態遷移図.

ここで、式(2.1)および式(2.2)の大域平衡方程式に対応する平衡方程式を書き下すと、次の方程式を書き下すことができる。

$$\begin{aligned} \lambda_0\pi_0 &= \mu_1\pi_1 \quad (j = 0) \\ (\lambda + \mu)\pi_j &= \lambda\pi_{j-1} + \mu\pi_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

同様に $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ まで両辺を足し合わせ、 $n = j$ とおくと次の詳細平衡方程式が導出される。

$$\lambda\pi_{j-1} = \mu\pi_j, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

上記の詳細平衡方程式の両辺を μ で割り、 $\rho = \lambda/\mu$ とすると以下の式が導出される。

$$\begin{aligned} \pi_j &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_{j-1} \\ &= \rho\pi_{j-1} \\ &= \rho^2\pi_{j-2} \\ &= \rho^j\pi_0 \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

確率の和が1なので正規化条件 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ を課す必要がある。よって定常状態確率が存在するためには $\rho < 1$ である必要がある。

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \pi_j = 1 \\ \pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \pi_0 &= 1 \\ \pi_0 &= \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \right]^{-1} \end{aligned}$$

ここで無限等比級数の和の公式を用いて $\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \rho/1 - \rho$ とするとM/M/1モデルの定常状態確率が導出される。

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1 - \rho} \right]^{-1} = 1 - \rho \tag{2.5}$$

$$\pi_j = \rho^j \pi_0 = \rho^j (1 - \rho) \tag{2.6}$$

この定常分布 π_j は無限に長い時間 $M/M/1$ モデルを観測したときに系内客数が j である時間の相対的な比率と捉えることもできる。よって、定常分布について系内客数の期待値を求めれば、平均系内客数に等しくなる。ここで平均系内客数 $E[L]$ は式(2.7)で表すことができる。また、式(2.7)およびリトルの公式を用いて平均系内滞在時間 $E[W]$ は式(2.8)で表すことができる。

$$\begin{aligned} E[L] &= \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j \\ &= (1-\rho) \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{E[L]}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2.2 $M/M/N$ 待ち行列

本節では、窓口が複数存在する $M/M/N$ モデルについて述べる。窓口の数を N とし、 N 個の窓口に対して1つの待ち行列が形成されるとする。 $M/M/N$ モデルとは、客が到着率 λ のポアソン過程に従って到着し、サービス時間は平均 $1/\mu$ を持つ指数分布に従い、 N 個の複数窓口を持つ待ち行列モデルである。サービス中の客も含めて系内に N 人以上の客が存在する場合、 N 個の窓口はすべてサービス中であるとする。

$M/M/N$ モデルも出生死滅過程で記述することができる。客は到着率 λ のポアソン過程に従って到着し、サービス時間は平均 $1/\mu$ を持つ指数分布に従うので、到着率は $\lambda_i = \lambda (i = 0, 1, \dots)$ であり、サービス率 μ_i は次のように与えられる。窓口でサービスを受けている客数が i 人ならば、その中の1人がサービスを終えて退去する率は客数 i にサービス率 μ を掛けた $i\mu$ となる。一方で、系内客数 i が窓口数 N 以上の場合、全ての窓口がサービス中であるためサービス率は $N\mu$ となる。 $M/M/N$ モデルの状態遷移図を図2.4に示す。

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & (i = 1, 2, \dots, N-1) \\ N\mu & (i = N, N+1, \dots) \end{cases}$$

図2.4の状態遷移図より平衡方程式を書き下すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_0\pi_0 &= \mu\pi_1 \quad (j=0) \\ (\lambda + j\mu)\pi_j &= \lambda\pi_{j-1} + (j+1)\mu\pi_{j+1} \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \\ (\lambda + N\mu)\pi_j &= \lambda\pi_{j-1} + N\mu\pi_{j+1} \quad (j=N, N+1, \dots) \end{aligned}$$

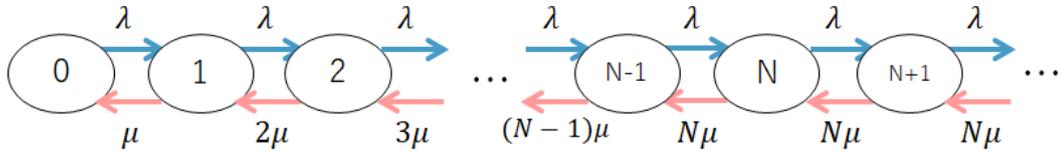


図2.4 M/M/Nモデルの状態遷移図.

はじめに $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ まで両辺を足し合わせると次の詳細平衡方程式が導出される.

$$\lambda\pi_j = (j + 1)\mu\pi_{j+1} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$$

これより,

$$\pi_{j+1} = \frac{\lambda}{j\mu}\pi_j$$

が成立し, $a = \lambda/\mu$ とおくと $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ のときの π_j を式(2.9)のように構成できる.

$$\begin{aligned} \pi_j &= \frac{\lambda}{j\mu}\pi_{j-1} \\ &= \frac{a}{j}\pi_{j-1} \\ &= \frac{a^2}{j(j-1)}\pi_{j-2} \\ &= \frac{a^j}{j!}\pi_0 \quad (j = 1, 2, \dots, N - 1) \end{aligned} \tag{2.9}$$

また上記と同様に $j = N, N + 1, \dots, k - 1$ まで両辺を足し合わせ $k = j$ とおくと, 次の詳細平衡方程式が導出される.

$$N\mu\pi_j = -\lambda\pi_{N-1} + N\mu\pi_N + \lambda\pi_{j-1} \quad (j = N, N + 1, \dots, k - 1)$$

これより, $a = \lambda/\mu$ とおくと $j = N, N + 1, \dots$ のときの π_j を式(2.10)のように構成できる.

$$\begin{aligned} \pi_j &= -\frac{\lambda}{N\mu}\pi_{N-1} + \pi_N + \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{j-1} \\ &= -\frac{a}{N} \cdot \frac{a^{N-1}}{(N-1)!}\pi_0 + \frac{a^N}{N!}\pi_0 + \frac{a}{N}\pi_{j-1} \\ &= \frac{a^j}{N^{j-N}N!}\pi_0 \quad (j = N, N + 1, \dots) \end{aligned} \tag{2.10}$$

確率の和が1なので正規化条件 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ を課す必要がある.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a^j}{j!} + \sum_{j=N}^{\infty} \frac{a^j}{N^{j-N}N!} \right) \pi_0 = 1$$

ここで無限級数の第2項は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^{\infty} \frac{a^j}{N^{j-N} N!} &= \frac{a^N}{N!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{N}\right)^j \\ &= \frac{a^N}{N!} \frac{1}{1 - a/N} \\ &= \frac{a^N}{N!} \frac{N}{N - a} \end{aligned}$$

ただし, 上記の無限級数は

$$a = \frac{\lambda}{\mu} < N \quad (2.11)$$

という安定条件があるときに限り収束する. よって π_0 は式(2.12)となる.

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{N-1} \frac{a^j}{j!} + \frac{a^N}{N!} \frac{N}{N - a} \right]^{-1} \quad (2.12)$$

また式(2.9)および(2.10)より, $M/M/N$ モデルの定常状態確率 π_j は以下となる.

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{a^j}{j!} \pi_0 & (i = 1, 2, \dots, N - 1) \\ \frac{a^j}{N^{j-N} N!} \pi_0 & (i = N, N + 1, \dots) \end{cases} \quad (2.13)$$

$M/M/N$ モデルの性能評価指標である平均待ち客数 $E[Q]$ は式(2.14)で表すことができる. また, 式(2.14)およびリトルの公式を用いて客の平均時間 $E[W]$ は式(2.15)で表すことができる.

$$E[Q] = C(N, a) \frac{a}{N - a} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{E[Q]}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{C(N, a)}{N - a} \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし, $C(N, a)$ はアーラン遅延公式と呼ばれ, 式(2.16)で表される.

$$C(N, a) = \frac{a^N}{N!} \frac{N}{N - 1} \pi_0 \quad (2.16)$$

2.3 準出生死滅過程による待ち行列モデル

本節では, 準出生死滅過程による待ち行列モデルについて述べる. 準出生死滅過程とは, 出生死滅過程を発展させたものである. レベルという状態変数 $L(t)$ と, 相という状態変数 $J(t)$ の2変数をもつ連続時間マルコフ連鎖 $\{(L(t), J(t)); t \geq 0\}$ である.

準出生死滅過程を説明するにあたり、以下に示す2ステージサービスモデルを用いることとする [6]. 客が到着率 λ_1 のポアソン過程に従って到着し、客は窓口でそれぞれサービス0とサービス1の2種類のサービスを受けるとする. ただし、客は必ずサービス0を先に受け、その後サービス1を受けるとする. サービス1が終了し窓口が空になった場合、次の客は窓口案内される. サービス0からサービス1に移行する客は到着率 λ_2 のポアソン仮定に従う. サービス1を開始してから退去するまでのサービス時間は平均 $1/\mu$ をもつ指数分布に従う. また、待ち室容量は無限であるとする. ここで系内客数を i 、窓口の客が受けているサービスの種類を j で表すこととする. 2ステージサービスモデルの状態遷移図を図2.5に示す.

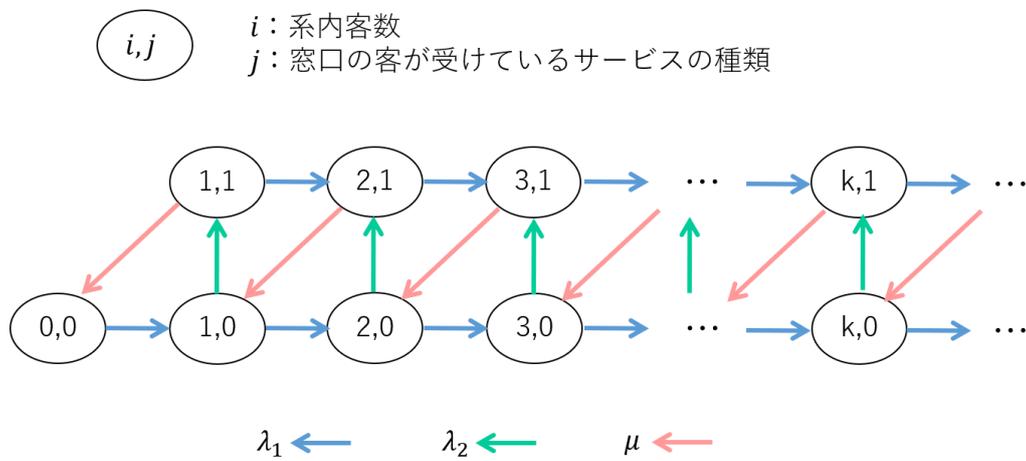


図2.5 2ステージサービスモデルの状態遷移図.

図2.5に示した状態遷移図より、平衡方程式を書き下すと式(2.17), (2.18), (2.19), (2.20)が導出される.

$$\lambda_1 \pi_{0,0} = \mu \pi_{1,1} \tag{2.17}$$

$$(\lambda_1 + \mu) \pi_{1,1} = \lambda_2 \pi_{1,0} \tag{2.18}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \pi_{i,0} = \lambda_1 \pi_{i-1,0} + \mu \pi_{i+1,1} \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{2.19}$$

$$(\lambda_1 + \mu) \pi_{i,1} = \lambda_1 \pi_{i-1,1} + \lambda_2 \pi_{i,0} \quad (i = 2, 3, \dots) \tag{2.20}$$

式 (2.17), (2.18), (2.19), (2.20)をもとに定常解 π を以下のように設定すると、このモデルは準出生死滅過程で表すことができる.

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$$

$$\pi_0 = \pi_{(0,0)}$$

$$\pi_i = (\pi_{(i,0)}, \pi_{(i,1)}) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

また, Q も以下のように表すことができる.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & 0 & -(\lambda_1 + \mu) & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \mu) & 0 & \lambda_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \mu) & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ここで, $B_0, B_{+1}, B_{-1}, Q_0, Q_{+1}, Q_{-1}$ を次のように表現すると $\pi Q = 0$ は簡潔に書けるようになる.

$$B_0 = -\lambda_1, \quad B_{+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ 0 & -(\lambda_1 + \mu) \end{pmatrix}, \quad Q_{+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad Q_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & B_{+1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_{-1} & Q_0 & Q_{+1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_{-1} & Q_0 & Q_{+1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & Q_{-1} & Q_0 & Q_{+1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & Q_{-1} & Q_0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

$\pi Q = 0$ より, 大域平衡方程式を書き下すと, 式(2.21), 式(2.22), 式(2.23)となる. 式(2.21)および(2.22)は境界方程式と呼ばれ, 式(2.23)は平衡方程式である.

$$\pi_0 B_0 + \pi_1 B_{-1} = 0 \quad (2.21)$$

$$\pi_0 B_{+1} + \pi_1 Q_0 + \pi_2 Q_{-1} = 0 \quad (2.22)$$

$$\pi_{k-1} Q_{+1} + \pi_k Q_0 + \pi_{k+1} Q_{-1} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.23)$$

初めに, 空間的に同質な部分の式(2.23)に着目する. 行列幾何解 π_k を次のように仮定し, それぞれを求めていくこととする.

$$\begin{aligned} \pi_k &= \pi_{k-1} R \\ &= \pi_1 R^{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.24)$$

式(2.24)を式(2.23)に代入し, 変形すると以下の式が導出される.

$$\begin{aligned} \pi_1 R^{k-2} Q_{+1} + \pi_1 R^{k-1} Q_0 + \pi_1 R^k Q_{-1} &= 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \\ \pi_1 R^{k-2} [Q_{+1} + R Q_0 + R^2 Q_{-1}] &= 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

式(2.24)より π_k は公比行列 \mathbf{R} と π_1 が与えられると決まる．行列の2次方程式 $\mathbf{Q}_{+1} + \mathbf{R}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{R}^2\mathbf{Q}_{-1}$ を解き，非負最小解を \mathbf{R} として採用する．公比行列 \mathbf{R} は次のように変形し，繰り返し計算等により数値的に求めることが多い．

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{+1}(-\mathbf{Q}_0)^{-1} + \mathbf{R}^2\mathbf{Q}_{-1}(-\mathbf{Q}_0)^{-1}$$

$$\text{初期値} \quad : \mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}(n+1) = \mathbf{Q}_{+1}(-\mathbf{Q}_0)^{-1} + \mathbf{R}^2\mathbf{Q}_{-1} - \mathbf{Q}_0^{-1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

次に，境界部分の式(2.22)，(2.23)に着目する．ここに $\pi_2 = \pi_1\mathbf{R}$ を代入し，行列で書き換えると以下のようなになる．

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & B_{+1} \\ B_{-1} & \mathbf{Q}_0 + \mathbf{R}\mathbf{Q}_{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

さらに，以下の正規化条件を用いることで π_0 および π_1 を一意に求めることができる．ただし \mathbf{e} は全ての要素が1である列ベクトルである．

$$\mathbf{1} = \pi_0\mathbf{e} + \pi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}^{k-1}\mathbf{e} = \pi_0\mathbf{e} + \pi_1(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{e}$$

最後に，準出生死滅課程の安定条件について述べる．上記で用いた \mathbf{Q}_{+1} および \mathbf{Q}_{-1} を用いることにより，準出生死滅課程が安定かどうかを判別することができる．式(2.25)はドリフト条件とも呼ばれており，式(2.25)が成立することと公比行列 \mathbf{R} のスペクトル半径が1未満であることは同値である．左辺は定常状態においてレベルが増加する確率フローであり，右辺は減少する確率フローである．待ち行列モデルとの対応を考えると，客の到着する確率よりも退去する確率の方が大きければ，待ち行列が安定するというを表している．よってこの条件は出生死滅過程における安定条件 $\rho = \lambda/\mu < 1$ とも対応している．

$$\tilde{\pi}\mathbf{Q}_{+1}\mathbf{1}^T < \tilde{\pi}\mathbf{Q}_{-1}\mathbf{1}^T \quad (2.25)$$

第3章

短期貸出客を優先処理する図書館の貸出図書待ち行列モデル

3.1 提案モデル

第3章では、短期貸出客を優先処理する図書館の待ち行列モデルについて述べる。複数の窓口からなる待ち行列システムを考える。窓口の数を c とし、優先客が優先的に使用できる窓口(以下、優先窓口)の数を $s(\leq c)$ とする。優先窓口以外の共通窓口は、優先客と非優先客の両方が公平に利用できるものとする。非優先客および優先客はそれぞれ到着率 λ_1 および λ_2 のポアソン過程に従って到着する。客はそれぞれ1つの窓口からサービスを受ける。各窓口でのサービス時間は互いに独立であり、非優先客は平均 $1/\mu_1$ をもつ指数分布に、優先客は平均 $1/\mu_2$ をもつ指数分布にそれぞれ従う($\mu_1 > \mu_2$)。図3.1に提案モデルの概要を示す。

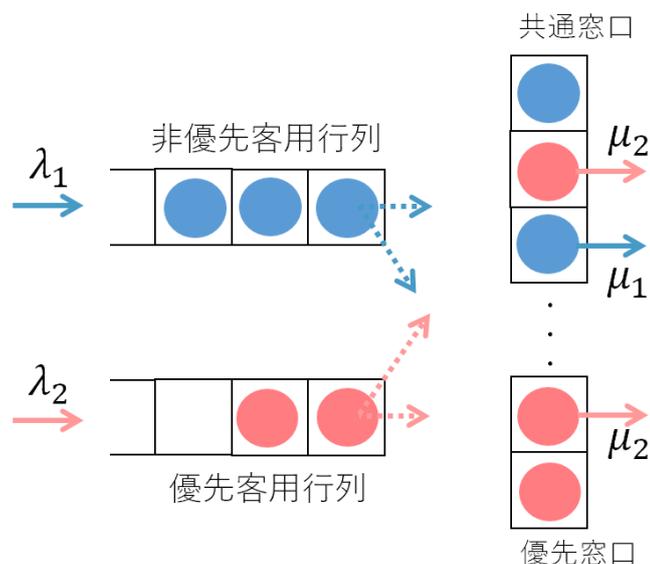


図3.1 提案モデルの概要.

3.2 提案モデルにおけるサービス規律

本節では、3.1節で示した提案モデルにおけるサービス規律について図を交えながら述べる。はじめに、優先客の到着時のサービス規律について述べ、非優先客の到着時のサービス規律についても同様に述べる。その後、客の到着時に窓口空きがなく行列が形成されている場合について述べる。最後に、サービスが終了し窓口にいる客が退出してそれぞれの窓口空きができた場合のサービス規律についてそれぞれ述べる。

ただし、非優先客の平均サービス時間 $1/\mu_1$ および優先客の平均サービス時間 $1/\mu_2$ はそれぞれの客に紐づいているパラメータであるため、行列に並んだ時点で決定される。よって、それぞれの客は共通窓口・優先窓口のどちらの窓口でサービスを受けたとしても、平均サービス時間は変わらないという点に留意されたい。

- 優先客到着時

優先客の到着時に優先客用行列が形成されておらず、優先窓口空きがあればその窓口でサービスを受ける(図3.2(a))。同様に優先客到着時に優先客用行列が形成されておらず、優先窓口空きがなく共通窓口空きがある場合は共通窓口でサービスを受ける(図3.2(b))。

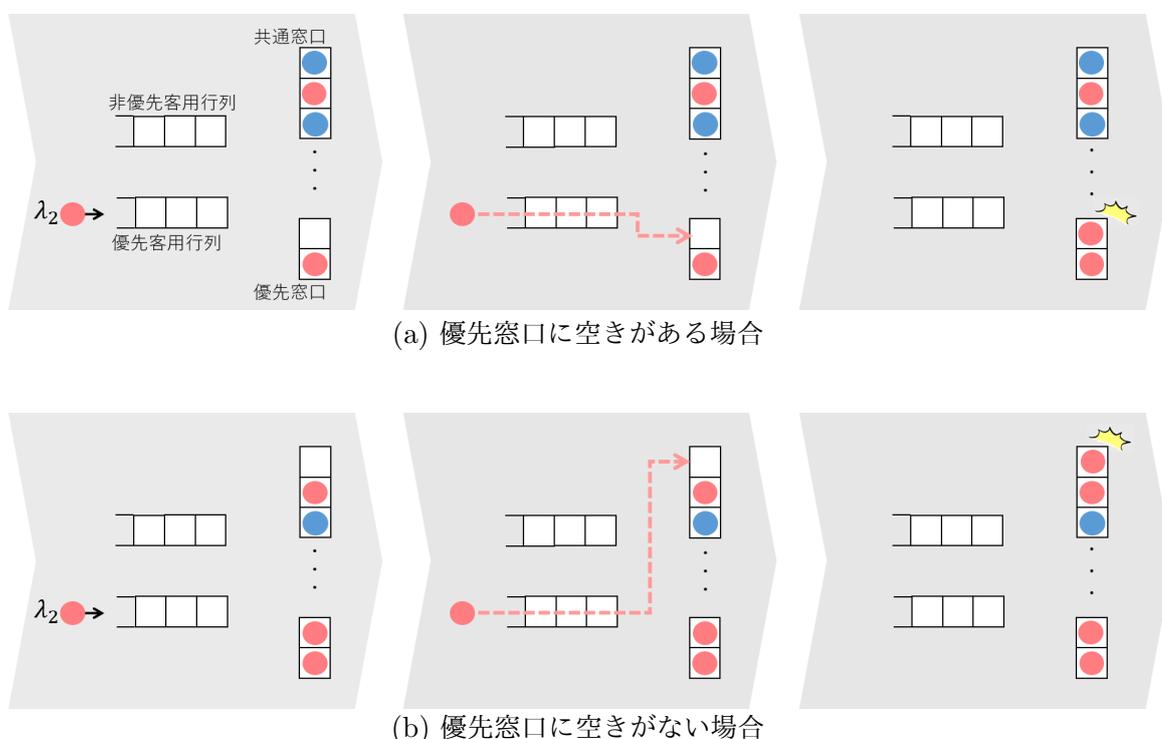
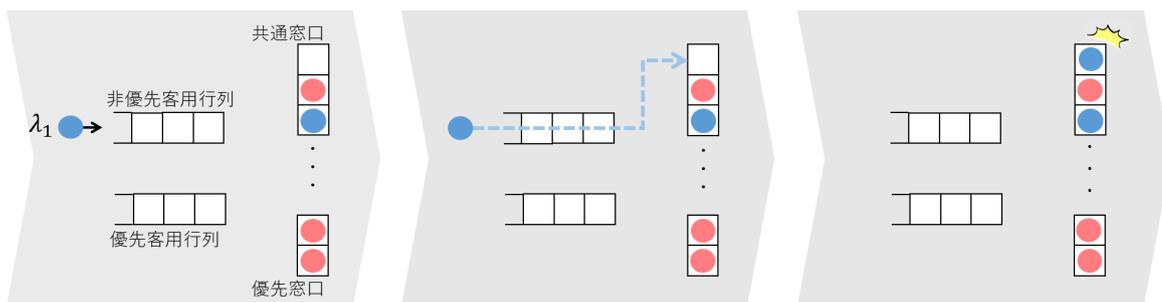


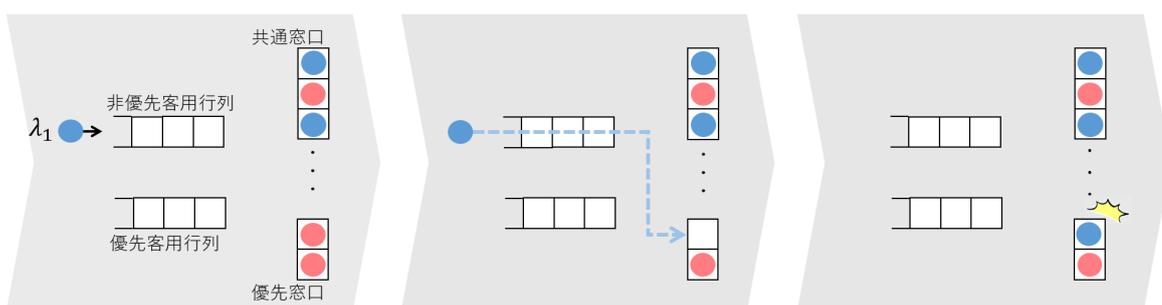
図3.2 優先客到着時のサービス規律.

- 非優先客到着時

非優先客の到着時に非優先客用行列が形成されておらず、共通窓口空きがあればその窓口でサービスを受ける(図3.3(a)). 同様に非優先客の到着時に非優先客用行列が形成されておらず、共通窓口に空きがない場合は、優先窓口に空きがある(したがって待機中の優先客がない)ときに限り、そこでサービスを受ける(図3.3(b)).



(a) 共通窓口空きがある場合



(b) 共通窓口空きがない場合

図3.3 非優先客到着時のサービス規律.

- 窓口空きがない場合

どちらの客の到着時にも窓口が空きがなくそれぞれの行列が形成されている場合は、優先客は優先客用行列に、非優先客は非優先客用行列にそれぞれ並ぶ(図3.4).

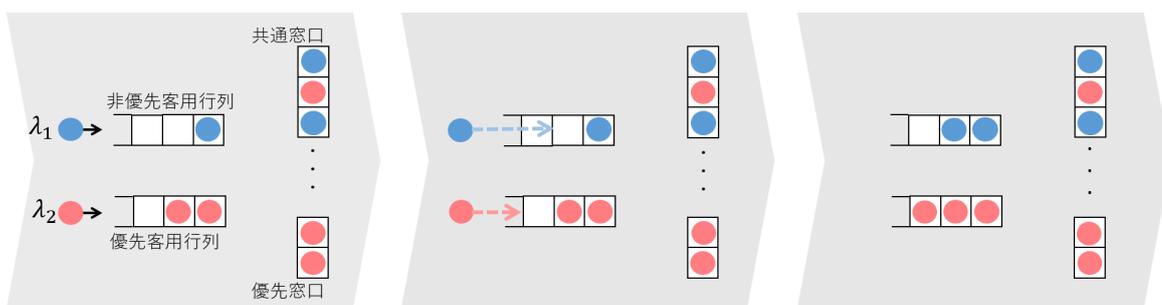
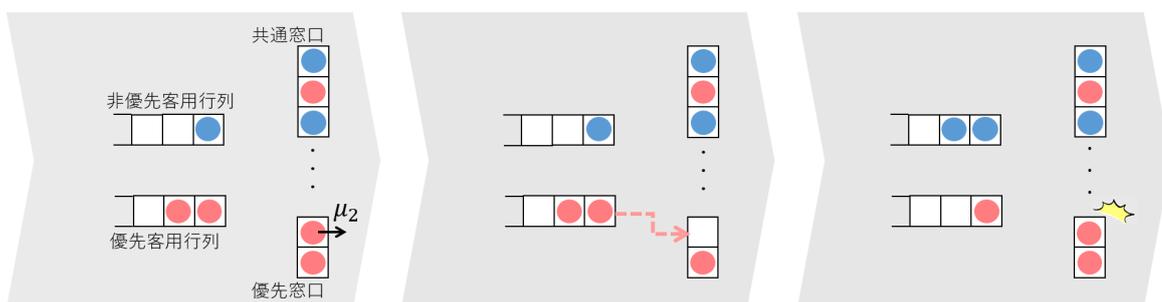


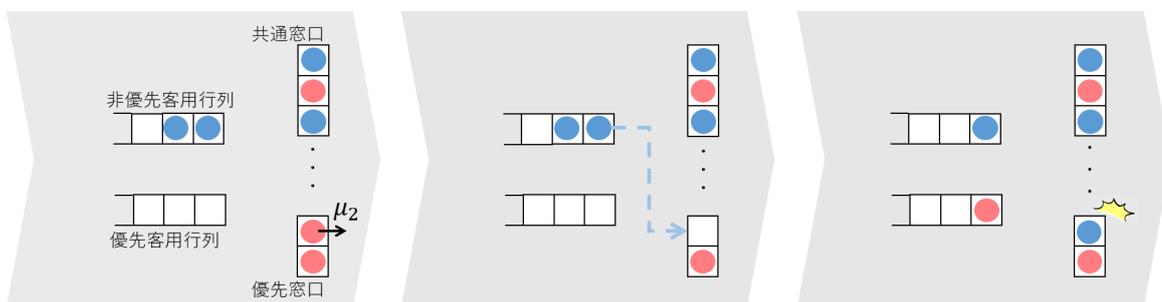
図3.4 窓口空きがない場合.

● サービス終了後、客の退出時

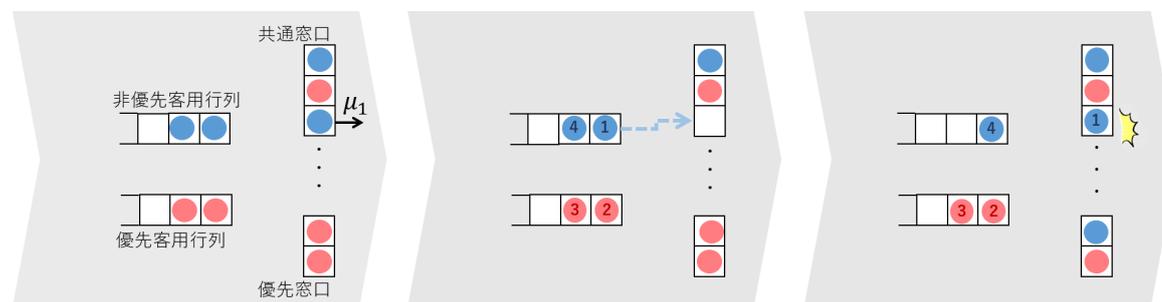
サービスが終了し優先窓口空きができた場合、優先客用行列の先頭の客が空いた窓口案内される(図3.5(a)). このとき優先客用行列に客がない場合は非優先客用行列の先頭の客が、空いた優先窓口案内される(図3.5(b)). サービスが終了し共通窓口空きができた場合、優先客用行列と非優先客用行列の先頭の客のうち、到着時刻の早い方が空いた共通窓口案内される(図3.5(c)).



(a) 優先窓口空きがあり、優先客用行列に客がいる場合



(b) 優先窓口空きがあり、優先客用行列に客がない場合



(c) 共通窓口空きがあり、優先客用行列に客がない場合

図3.5 サービスが終了後、客の退出時のサービス規律.

第4章

シミュレーション

第4章では、第3章で述べた短期貸出客を優先処理する図書館の待ち行列モデルのシミュレーション条件とその結果について述べる。

4.1 シミュレーション条件

はじめに、シミュレーション条件について述べる。図1.1に示した2018年10月17日時点の千葉市図書館における“蜜蜂と遠雷”の予約状況に合わせてシミュレーション条件を設定した。窓口数 c は所蔵冊数(49)に合わせ、平均待ち行列長は予約件数(1,040)となるようにした。さらに $\lambda_1 = 4\lambda_2$ (優先客は非優先客の4倍)という条件のもとで、利用率が $\rho = 0.999$ となるように到着率 λ_1 , λ_2 を設定してシミュレーションを行った。なお、非優先客の平均サービス時間 $1/\mu_1$ は14日とし、優先客の平均サービス時間 $1/\mu_2$ は3日, 5日, 7日の3通りの場合を想定した。優先客の平均サービス時間が3日の場合を(a), 5日の場合を(b), 7日の場合を(c)としたときのシミュレーション条件を表4.1に示す。ただし, $\lambda_{total} = \lambda_1 + \lambda_2$ である。

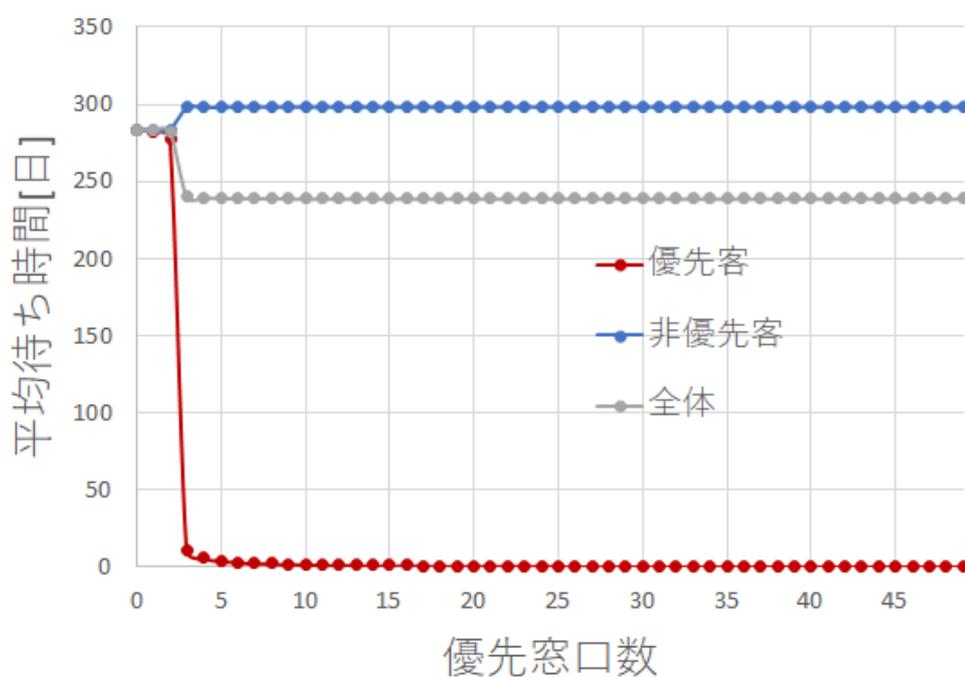
表4.1 シミュレーション条件

	(a)	(b)	(c)
$1/\mu_1$ [日]	14	14	14
$1/\mu_2$ [日]	3	5	7
λ_1 [人/日]	3.3188	3.2101	3.1082
λ_2 [人/日]	0.8298	0.8025	0.7770
λ_{total} [人/日]	4.1486	4.0126	3.8852

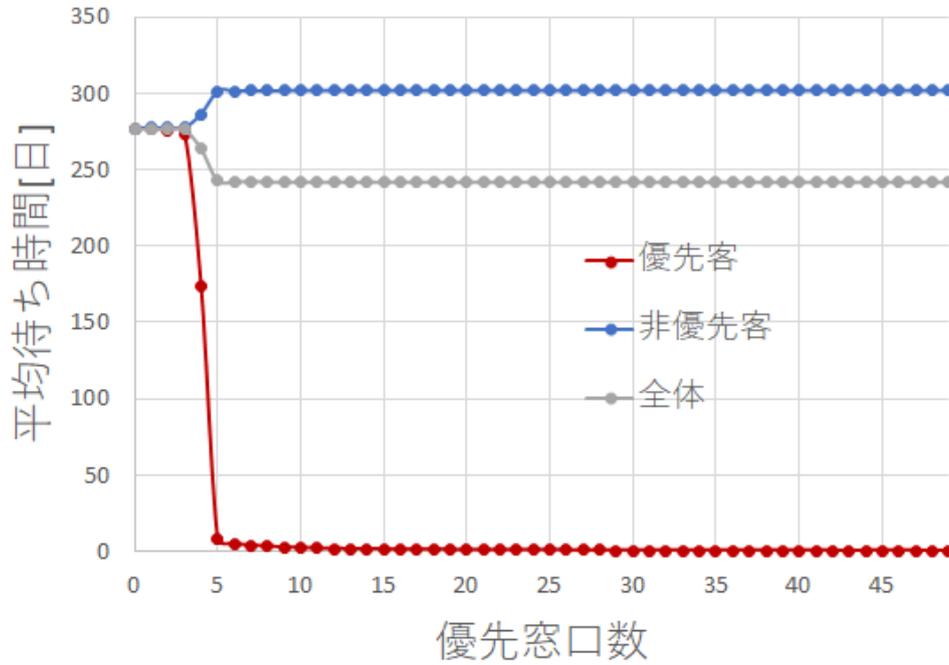
次に、短期貸出客を優先処理する図書館の待ち行列モデルを評価するため、表4.1に示したシミュレーション条件のもとC言語を用いてシミュレータを作成した。本研究で作成したシミュレータはイベント駆動型シミュレーションを採用している。イベント駆動型シミュレーションとは、イベントに対応する形で処理を実行するシミュレーション方式である。

4.2 シミュレーション結果

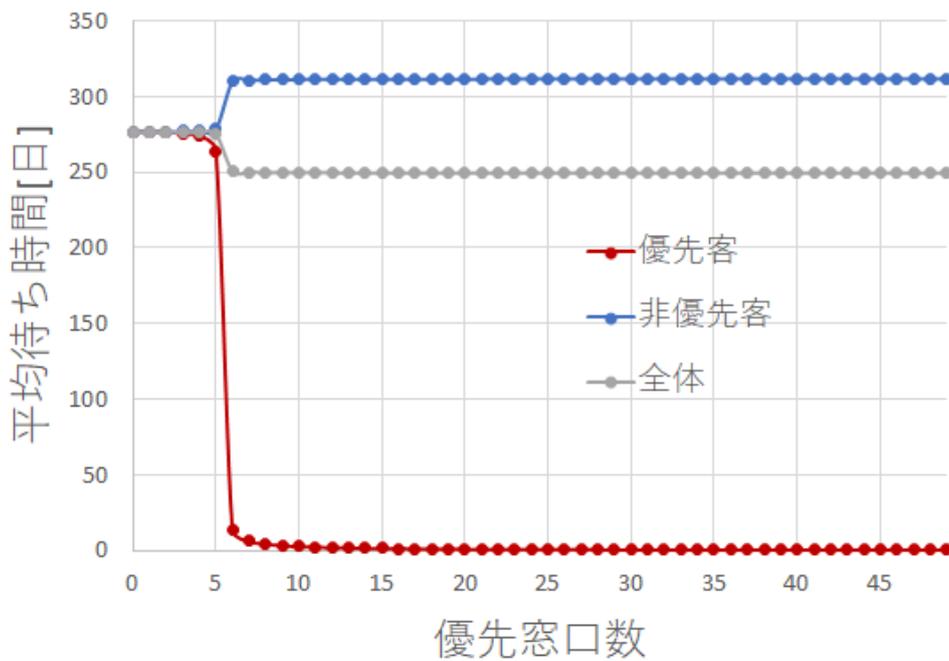
本節では、表4.1に示した条件で作成したシミュレータを用いたシミュレーション結果について述べる。優先窓口数 s を0から49まで変化させ優先客、非優先客、全体のそれぞれについて平均待ち時間[日]を評価した。シミュレーション結果を図4.2(a)-(c)にそれぞれ示す。なお、赤いグラフは優先客の平均待ち時間を、青いグラフは非優先客の平均待ち時間を、灰色のグラフは全体の平均待ち時間を表している。



(a) 平均サービス時間=3日.



(b) 平均サービス時間=5日.



(c) 平均サービス時間=7日.

図4.2 優先客, 非優先客の平均待ち時間

図4.2に示したシミュレーション結果より次のことがわかる。優先客の平均サービス時間 $1/\mu_2$ が3 日の場合、優先窓口数を7 とすると、優先客の平均待ち時間は283日から2.6日へと約99%減少し、非優先客の平均待ち時間は283日から298日へと約5%増加した。また、全体の平均待ち時間は283日から239日へと約15%減少した。

また、優先客の平均サービス時間 $1/\mu_2$ が5 日の場合、優先窓口数を9 とすると、優先客の平均待ち時間は277日から2.4日へと約99%減少し、非優先客の平均待ち時間は277日から301日へと約8%増加し、全体の平均待ち時間は277日から242日へと約13%減少した。

同様に、優先客の平均サービス時間 $1/\mu_2$ が7 日の場合、優先窓口数を10 とすると、優先客の平均待ち時間は276日から2.6日へと約99%減少し、非優先客の平均待ち時間は276日から311日へと約10%増加し、全体の平均待ち時間は276日から250日へと約10%減少した。以上のシミュレーション結果をまとめた表を表4.2に示す。なお、優先窓口数とした数は優先客の平均待ち時間が初めて99%減少となった窓口数である。

表4.2 シミュレーション結果

	(a)	(b)	(c)
$1/\mu_1$ [日]	14	14	14
$1/\mu_2$ [日]	3	5	7
優先窓口数	7	9	10
優先客の平均待ち時間[日]	99%減少	99%減少	99%減少
非優先客の平均待ち時間[日]	5%増加	8%増加	10%増加
全体の平均待ち時間[日]	15%減少	13%減少	10%減少

以上のシミュレーション結果より、優先客の平均待ち時間はいずれも大幅に減少し、非優先客の平均待ち時間は若干増加するものの、全体の平均待ち時間は減少することがわかる。また優先窓口数をある程度大きくとると、優先客、非優先客の平均待ち時間は優先窓口数に対してほとんど依存しない結果となった。よって、短期貸出客用の優先図書を設けることは十分に効果があると結論づけることができる。

第5章

モデルの解析

5.1 $M/H_2/N$ モデルの安定条件

本研究で扱った待ち行列モデルは、全ての窓口が共通窓口の場合は客の到着過程がポアソン過程で、サービス時間が2次の超指数分布に従い、窓口数が N である $M/H_2/N$ モデルと等価になる。本節ではこの $M/H_2/N$ モデルの安定条件を探り、 $1/\mu = P_1/\mu_1 + P_2/\mu_2$ とした際の安定条件が $M/M/N$ モデルの安定条件と等しくなることを確認する。今回は簡単のため窓口数 $N = 2$ とした。

ここで系内客数が l 、窓口にいる非優先客数を i 、窓口にいる優先客数を j で表すこととする。窓口数 $N \geq i + j$ である。提案モデルと同様に非優先客は到着率 λ_1 で到着し、優先客は到着率 λ_2 で到着する。サービス率も同様に非優先客は平均 $1/\mu_1$ をもつ指数分布に、優先客は平均 $1/\mu_2$ をもつ指数分布にそれぞれ従う。ここで $\mu_1 > \mu_2$ である。また今回は到着率に $\lambda_1 = 4\lambda_2$ という条件を付けているため、非優先客が到着する確率を P_1 、優先客が到着する確率を $P_2 (= 1 - P_1)$ として以下のようにそれぞれのサービス率を定義した。なお、 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ である。 $M/H_2/2$ モデルの状態遷移図を図5.1に示す。

非優先客が退去し、非優先行列の先頭客が窓口へ進む	:	$\mu_{11} = \mu_1 P_1$
非優先客が退去し、優先行列の先頭客が窓口へ進む	:	$\mu_{12} = \mu_1 P_2$
優先客が退去し、非優先行列の先頭客が窓口へ進む	:	$\mu_{21} = \mu_2 P_1$
優先客が退去し、優先行列の先頭客が窓口へ進む	:	$\mu_{22} = \mu_2 P_2$

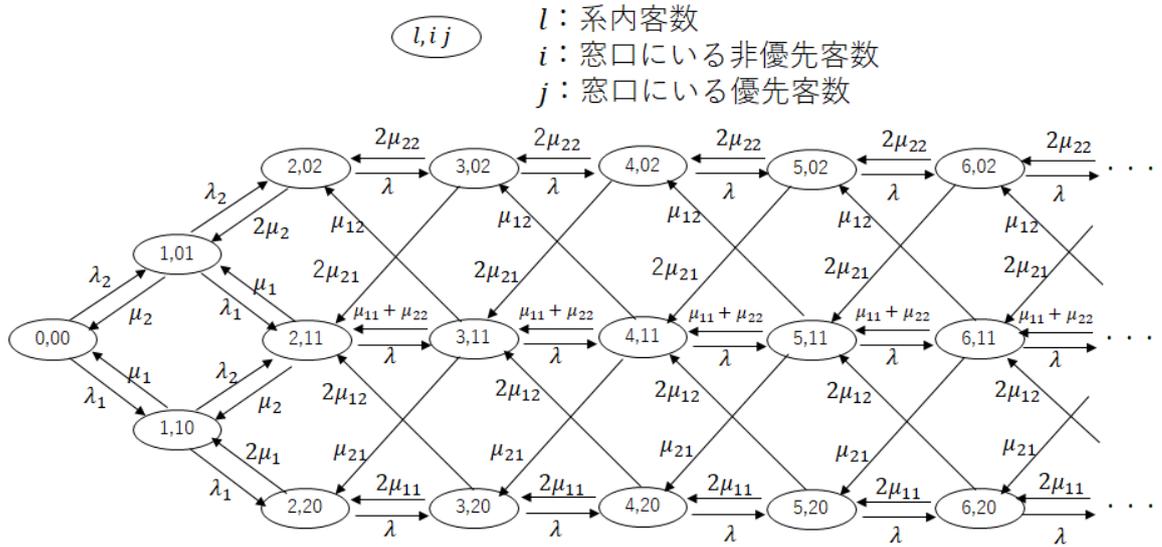


図5.1 $M/H_2/2$ モデルの状態遷移図.

図5.1に示した状態遷移図より，平衡方程式を書き下すと式(5.1)から式(5.9)のように導出される．

$$\lambda_0 \pi_{(0,0,0)} = \mu_1 \pi_{(1,1,0)} + \mu_2 \pi_{(1,0,1)} \quad (5.1)$$

$$(\lambda + \mu_2) \pi_{(1,0,1)} = \lambda_2 \pi_{(0,0,0)} + 2\mu_2 \pi_{(2,0,2)} + \mu_1 \pi_{(2,1,1)} \quad (5.2)$$

$$(\lambda + \mu_1) \pi_{(1,1,0)} = \lambda_1 \pi_{(0,0,0)} + \mu_2 \pi_{(2,1,1)} + 2\mu_1 \pi_{(2,2,0)} \quad (5.3)$$

$$(\lambda + 2\mu_2) \pi_{(2,0,2)} = \lambda_2 \pi_{(1,0,1)} + 2\mu_{22} \pi_{(3,0,2)} + \mu_{12} \pi_{(3,1,1)} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi_{(2,1,1)} &= \lambda_1 \pi_{(1,0,1)} + \lambda_2 \pi_{(1,1,0)} \\
 &\quad + 2\mu_{21} \pi_{(3,0,2)} + (\mu_{11} + \mu_{22}) \pi_{(3,1,1)} + 2\mu_{12} \pi_{(3,2,0)}
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$(\lambda + 2\mu_1) \pi_{(2,2,0)} = \lambda_1 \pi_{(1,1,0)} + \mu_2 \pi_{(3,1,1)} + 2\mu_{11} \pi_{(3,2,0)} \quad (5.6)$$

$$(\lambda + 2\mu_2) \pi_{(l,0,2)} = \lambda \pi_{(l-1,0,2)} + 2\mu_{22} \pi_{(l+1,0,2)} + \mu_{12} \pi_{(l+1,1,1)} \quad (l = 3, 4, \dots) \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \pi_{(l,1,1)} &= \lambda \pi_{(l-1,1,1)} + 2\mu_{21} \pi_{(l+1,0,2)} \\
 &\quad + (\mu_{11} + \mu_{22}) \pi_{(l+1,1,1)} + 2\mu_{12} \pi_{(l+1,2,0)} \quad (l = 3, 4, \dots)
 \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$(\lambda + 2\mu_1) \pi_{(l,2,0)} = \lambda \pi_{(l-1,2,0)} + \mu_2 \pi_{(l+1,1,1)} + 2\mu_{11} \pi_{(l+1,2,0)} \quad (l = 3, 4, \dots) \quad (5.9)$$

式(5.1)から式(5.9)をもとに定常解 $\pi_{(l,ij)}$ を以下のように設定すると、このモデルは準出生死滅過程で表すことができる。

$$\begin{aligned}\pi &= (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) \\ \pi_0 &= \pi_{(0,00)} \\ \pi_1 &= (\pi_{(1,01)}, \pi_{(1,10)}) \\ \pi_l &= (\pi_{(l,01)}, \pi_{(l,02)}, \pi_{(l,10)}, \pi_{(l,11)}, \pi_{(l,20)}) \quad l = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

また、 $\pi Q = 0$ より、

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots) \begin{pmatrix} B_0 & B_{+1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_{-1} & Q_0 & Q_{+1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_{-1} & Q_0 & Q_{+1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & Q_{-1} & Q_0 & Q_{+1} & \\ 0 & 0 & 0 & Q_{-1} & Q_0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

と表すことができる。ただし、 $B_0, B_{+1}, B_{-1}, Q_0, Q_{+1}, Q_{-1}$ は以下の通りでいずれも $(N+1) \times (N+1)$ の行列である。

$$\begin{aligned}B_0 &= \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & -(\lambda + \mu_2) & 0 \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda + \mu_1) \end{pmatrix} \\ B_{+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 2\mu_1 \end{pmatrix} \\ Q_0 &= \begin{pmatrix} -(\lambda + 2\mu_2) & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + \mu_1) \end{pmatrix} \\ Q_{+1} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q_{-1} = \begin{pmatrix} 2\mu_{22} & 2\mu_{21} & 0 \\ \mu_{12} & \mu_{11} + \mu_{22} & \mu_{21} \\ 0 & 2\mu_{12} & 2\mu_{11} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

次に、 $M/H_2/2$ モデルの安定条件 $\tilde{\pi} Q_{+1} \mathbf{1}^T < \tilde{\pi} Q_{-1} \mathbf{1}^T$ を求めることとする。 $\tilde{\pi}$ は、 $\tilde{\pi} \tilde{Q} = 0$ と、 $\tilde{\pi} \mathbf{1}^T = 1$ の解である定常分布である。 $\tilde{Q} = Q_0 + Q_{+1} + Q_{-1}$ とすると

$$\begin{aligned}\tilde{Q} &= Q_0 + Q_{+1} + Q_{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2\mu_{21} & 2\mu_{21} & 0 \\ \mu_{12} & -(\mu_{12} + \mu_{21}) & \mu_{21} \\ 0 & 2\mu_{12} & -2\mu_{12} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる. $\tilde{\pi}\tilde{Q} = \mathbf{0}$ より

$$\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\mu_{21} & 2\mu_{21} & 0 \\ \mu_{12} & -(\mu_{12} + \mu_{21}) & \mu_{21} \\ 0 & 2\mu_{12} & -2\mu_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\mu_{21}\tilde{\pi}_0 + \mu_{12}\tilde{\pi}_1 & 2\mu_{21}\tilde{\pi}_0 - (\mu_{12} + \mu_{21})\tilde{\pi}_1 + 2\mu_{12}\tilde{\pi}_2 & \mu_{21}\tilde{\pi}_1 - 2\mu_{12}\tilde{\pi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\mu_{21}\tilde{\pi}_0 + \mu_{12}\tilde{\pi}_1 = 0 \\ 2\mu_{21}\tilde{\pi}_0 - (\mu_{12} + \mu_{21})\tilde{\pi}_1 + 2\mu_{12}\tilde{\pi}_2 = 0 \\ \mu_{21}\tilde{\pi}_1 - 2\mu_{12}\tilde{\pi}_2 = 0 \end{cases}$$

以上の連立方程式に正規化条件 $\tilde{\pi}_0 + \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 = 1$ を課すと, $\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ は次のように導出される.

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{\mu_{12}^2}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2}, \quad \tilde{\pi}_1 = \frac{2\mu_{12}\mu_{21}}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{\mu_{21}^2}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2}$$

$\tilde{\pi}$ および \tilde{Q} より, 安定条件 $\tilde{\pi}Q_{+1}\mathbf{1}^T < \tilde{\pi}Q_{-1}\mathbf{1}^T$ の左辺と右辺を導出する.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \tilde{\pi}Q_{+1}\mathbf{1}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mu_{12}^2}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} & \frac{2\mu_{12}\mu_{21}}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} & \frac{\mu_{21}^2}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} (\mu_{12} + \mu_{21})^2 \\ &= \lambda \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \tilde{\pi}Q_{-1}\mathbf{1}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mu_{12}^2}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} & \frac{2\mu_{12}\mu_{21}}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} & \frac{\mu_{21}^2}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mu_{22} & 2\mu_{21} & 0 \\ \mu_{12} & \mu_{11} + \mu_{22} & \mu_{21} \\ 0 & 2\mu_{12} & 2\mu_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2(\mu_{12}^2\mu_{22} + 2\mu_{12}^2\mu_{21} + \mu_{11}\mu_{12}\mu_{21} + \mu_{12}\mu_{21}\mu_{22} + 2\mu_{12}\mu_{21}^2 + \mu_{11}\mu_{21}^2)}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} \\ &= \frac{2\mu_1\mu_2(\mu_{12} + \mu_{21})(P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2)}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} \\ &= \frac{2\mu_1\mu_2(\mu_{12} + \mu_{21})(P_1 + P_2)^2}{(\mu_{12} + \mu_{21})^2} \\ &= \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_{12} + \mu_{21}} \end{aligned} \tag{5.11}$$

なお、主に右辺の計算において $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ であることと、 $P_1 + P_2 = 1$ であることを用いた。また、 $\mu_1 = \mu_{11} + \mu_{12}$ および $\mu_2 = \mu_{21} + \mu_{22}$ であることも用いた。以上より、式(5.10)、(5.11)と $1/\mu = P_1/\mu_1 + P_2/\mu_2$ とおくことにより、 $M/H_2/2$ モデルの安定条件が導出される。

$$\begin{aligned}\lambda &< \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_{12} + \mu_{21}} \\ \lambda &< \frac{2}{\frac{P_1}{\mu_1} + \frac{P_2}{\mu_2}} \\ \frac{\lambda}{\mu} &< 2\end{aligned}\quad (5.12)$$

本節では $N = 2$ としたため、式(5.12)の右辺を N とすることにより、第4章の式(2.11)で示した $M/M/N$ モデルの安定条件と等しくなることが確認できる。

5.2 準出生死滅過程を用いた解析

本節では、2.3節で扱った準出生死滅過程を用いた $M/H_2/N$ モデルの解析について述べる。ここでも同様に5.1節で用いた $B_0, B_{+1}, B_{-1}, Q_0, Q_{+1}, Q_{-1}$ を用いる。 $\pi Q = 0$ より、大域平衡方程式を書き下すと、式(5.13)、式(5.14)、式(5.15)となる。式(5.13)および(5.14)は境界方程式と呼ばれ、式(5.15)は平衡方程式である。

$$\pi_0 B_0 + \pi_1 B_{-1} = 0 \quad (5.13)$$

$$\pi_0 B_{+1} + \pi_1 Q_0 + \pi_2 Q_{-1} = 0 \quad (5.14)$$

$$\pi_{k-1} Q_{+1} + \pi_k Q_0 + \pi_{k+1} Q_{-1} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (5.15)$$

初めに、空間的に同質な部分の式(5.15)に着目する。行列幾何解 π_k を次のように仮定し、それぞれを求めていくこととする。

$$\begin{aligned}\pi_k &= \pi_{k-1} R \\ &= \pi_1 R^{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots)\end{aligned}\quad (5.16)$$

式(5.16)を式(5.15)に代入し、変形すると以下の式が導出される。

$$\pi_1 R^{k-2} Q_{+1} + \pi_1 R^{k-1} Q_0 + \pi_1 R^k Q_{-1} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$\pi_1 R^{k-2} [Q_{+1} + R Q_0 + R^2 Q_{-1}] = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

式(5.16)より π_k は公比行列 R と π_1 が与えられると決まる。行列の2次方程式 $Q_{+1} + R Q_0 + R^2 Q_{-1}$ を解き、非負最小解を R として採用する。公比行列 R は次のように変形し、繰り返し計算により数値的に求める。

$$R = Q_{+1}(-Q_0)^{-1} + R^2 Q_{-1}(-Q_0)^{-1} \quad (5.17)$$

$$\text{初期値} \quad : R(0) = 0$$

$$R(n+1) = Q_{+1}(-Q_0)^{-1} + R^2 Q_{-1}(-Q_0)^{-1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

式(5.17)に $Q_{+1}(-Q_0)^{-1}$, $Q_{-1}(-Q_0)^{-1}$ を代入する. パラメータ λ , μ_1 , μ_2 は表4.1に示した(a)の数値を利用した. それぞれ $\lambda = 4.1486$, $\mu_1 = 1/14$, $\mu_2 = 1/3$ である. また, $P_1 = 0.8$, $P_2 = 0.2$ より, μ_{11} , μ_{12} , μ_{21} , μ_{22} は以下の通りである.

$$\mu_{11} = \mu_1 P_1 = 0.05714$$

$$\mu_{12} = \mu_1 P_2 = 0.01428$$

$$\mu_{21} = \mu_2 P_1 = 0.26666$$

$$\mu_{22} = \mu_2 P_2 = 0.06666$$

$$\begin{aligned} Q_{+1}(-Q_0)^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+2\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu_1+\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu_1} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.8616 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2196 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7743 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{-1}(-Q_0)^{-1} &= \begin{pmatrix} 2\mu_{22} & 2\mu_{21} & 0 \\ \mu_{12} & \mu_{11} + \mu_{22} & \mu_{21} \\ 0 & 2\mu_{12} & 2\mu_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+2\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\mu_{22}}{\lambda+2\mu_2} & \frac{2\mu_{21}}{\lambda+\mu_1+\mu_2} & 0 \\ \frac{\mu_{12}}{\lambda+2\mu_2} & \frac{\mu_{11}+\mu_{22}}{\lambda+\mu_1+\mu_2} & \frac{\mu_{21}}{\lambda+2\mu_1} \\ 0 & \frac{2\mu_{12}}{\lambda+\mu_1+\mu_2} & \frac{2\mu_{11}}{\lambda+2\mu_1} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.0277 & 0.1171 & 0 \\ 0.0029 & 0.0272 & 0.0621 \\ 0 & 0.0627 & 0.0266 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初期値を $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$ とし, 繰り返し計算により \mathbf{R} を求めると次のようになる.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.883681 & 0.096414 & 0.011639 \\ 0.002743 & 0.936217 & 0.057466 \\ 0.000040 & 0.006552 & 0.993813 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

次に, 境界部分の式(5.13), (5.14)に着目する. ここに $\pi_2 = \pi_1 \mathbf{R}$ を代入し, 行列で書き換えると以下のようなになる.

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & B_{+1} \\ B_{-1} & Q_0 + \mathbf{R}Q_{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

さらに, 以下の正規化条件を用いることで π_0 および π_1 を一意に求めることができる. ただし \mathbf{e} は全ての要素が1である列ベクトルである.

$$1 = \pi_0 \mathbf{e} + \pi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}^{k-1} \mathbf{e} = \pi_0 \mathbf{e} + \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{e}$$

第6章

結論

6.1 まとめ

本研究では利用者全体の平均待ち時間を軽減する方策の有効性を検討することを目的とし、貸出図書の予約待ちの現象を待ち行列モデルで表現した。またシミュレーションを行うことにより、短期貸出客用の優先図書を設けることの効果の評価した。その結果、短期貸出客用の優先図書を設けることで短期貸出客の待ち時間は大幅に減少し、一般客の待ち時間は若干増加するものの、全体の待ち時間は減少するということが確認された。この結果より、短期貸出客用の図書を設けることは十分に効果があると結論づけることができる。

6.2 今後の展望

本研究で扱った待ち行列モデルは、全ての窓口が共通窓口の場合は客の到着過程がポアソン過程で、サービス時間が2次の超指数分布に従い、窓口数が N である $M/H_2/N$ モデルと等価になる。今後の展望として以下の3点が挙げられる。1つは、第6章で導出した窓口数 $N = 2$ のときの安定条件を、窓口数 N の一般形として導出することである。2つ目は、全ての窓口が共通窓口の場合の定常状態確率の導出を行い、今回得られたシミュレーション結果が $M/H_2/N$ モデルの解析結果と等しくなることを確認することである。3つ目は、本研究で扱った優先窓口がある場合の待ち行列モデルを解析的に評価する手法を検討することである。

謝辞

本論文を作成するにあたり，指導教員の塩田茂雄先生に多大なるご指導をいただいたことに対し，感謝の意をお伝えします．1月23日から25日に開催された第35回待ち行列シンポジウムにて，参加者の皆様に大変重要な点についてご指摘いただきました．また，助言等いただきました塩田研究室の皆様にも大変お世話になりました．ありがとうございました．

参考文献

- [1] 宮部頼子, 現代図書館情報学シリーズ4 図書館サービス概論, 樹村房, 2012.
- [2] 千葉市図書館, 予約ベスト一覧: 蔵書検索, <https://www.library.city.chiba.jp/licsxp-opac/WOpacMsgRankMenuToMsgRankListAction.do>, 2018-10-17閲覧.
- [3] 岸田和明, 利用統計を用いた蔵書評価の手法, 情報の科学と技術 44巻6号, 情報科学技術協会, 1997.
- [4] Ken'ichi Katou, Yukio Takahashi, A QUEUEING MODEL FOR CUSTOMERS REQUESTING SERVICE POSITIONS AT A COUNTER, Journal of the Operating Research Society of Japan Vol.59 No.2 pp.147-173, 2016.
- [5] 高橋幸雄, 森村英典, 経営科学のニューフロンティア7 混雑と待ち, 朝倉書店, 2001.
- [6] 滝根哲哉, $M/M/1$ を超えて-準出生死滅過程への招待-, 第4回「学生・初学者のための待ち行列チュートリアル」, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会, 2008.
- [7] 塩田茂雄, 河西憲一, 豊泉洋, 会田雅樹, 待ち行列理論の基礎と応用, 共立出版, 2014.