

平成30年度 卒業論文

意見投稿の非同期性を考慮したネットワーク上の
合意形成過程

千葉大学工学部都市環境システム学科

15T0270W 加藤 大

指導教員：塩田茂雄

平成31年2月4日提出

目次

第 1 章	序論	2
1.1	研究背景	2
1.2	研究目的	2
1.3	表記法	2
1.4	本論文の構成	3
第 2 章	既存研究	4
2.1	既存モデルの概要	4
2.2	信念更新ルール	5
2.3	仮定	7
2.4	収束分析	8
2.5	数値例	11
第 3 章	SNS における集団的意思決定モデル	16
3.1	提案モデルの概要	16
3.2	信念更新ルール	17
3.3	仮定	18
3.4	収束分析	20
3.5	数値例	27
第 4 章	結論	34
	謝辞	35
	参考文献	36

第 1 章

序論

1.1 研究背景

社会の中で個人はソーシャルネットに属している。各個人の信念はネットワーク内の相互作用により形成され、集団で意思決定をするには合意の形成が必要であり、個人の意見と個人間の信頼、ネットワーク内での個人の影響力等の要因によって集団の合意形成がされる。この合意形成の過程を数理的に表した DeGroot モデルが存在する。しかし、DeGroot モデルでは全員が意見を出し合いネットワーク内で合意に達する値はただ 1 つに決まり、実社会の現象を反映しにくい欠点が存在する。よって本論文では意見投稿の順に依存して合意に達する過程を既存モデルの変形によって表現し、実社会においてどのような現象を表現することができるかについてモデルの考察を行う。

1.2 研究目的

本論文は既存の集団的意思決定モデルに確率論の要素を取り入れたモデルを確立し、これを解析し結果を考察することを目的としている。

1.3 表記法

ベクトルに関して特に表記しない限り列ベクトルとする。 x_i または $[x]_i$ はベクトル \boldsymbol{x} の i 番目の要素を表し、ベクトル \boldsymbol{x} の要素 $x_i \geq 0$ がすべての i について成り立つとき $\boldsymbol{x} \geq 0$ と表す。

行列に関して行列 \boldsymbol{A} に対して i 番目の行と j 番目の列の要素を A_{ij} または $[A]_{ij}$ と表し、行列 \boldsymbol{A} の転置行列を \boldsymbol{A}' で表す。

$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}$ は 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ のスカラー積を示す。

\boldsymbol{e}_i を使用して i 番目の要素が 1 で他のすべての要素が 0 に等しいベクトルを定義し、すべての要素が 1 に等しいベクトルを \boldsymbol{e} で定義する。

ベクトル \boldsymbol{a} が非負であり、行の要素の和が 1 となる時確率ベクトルと呼ぶ。すなわち $a_i \geq 0$, $\sum_i a_i = 1$ を満たす。正方行列 \boldsymbol{A} は \boldsymbol{A} の各行が確率ベクトルであるときに (行) 確率行列であるという。

1.4 本論文の構成

本論文は以下のような構成になっている。

第 1 章

研究背景および研究目的を示し，本論文で用いる表記法を示す。

第 2 章

既存モデルとして集団的意思決定を示した DeGroot モデルの仮定，線形信念更新ルールを示し，それに従うとき収束分析に関する定理を示し，仮定の下で任意の初期条件に対して合意が形成されること数値例を挙げて示す。

第 3 章

提案モデルとして既存モデルの変形を考え，第 2 章と同様に仮定・線形信念更新ルールを示し，それに従うときの収束分析に関する定理を示し，数値例として仮定の下で合意が形成されることを示す。また既存モデルと提案モデルの相違点について考え，モデルの特徴について述べる。

第 4 章

本研究の結論と今後の課題について述べる。

第 2 章

既存研究

第 2 章では、本論に入る前に既存モデルの DeGroot モデルについて述べる。

DeGroot モデルは、同じソーシャルネットワークに属する集団を考えて、各個人がそれぞれの知識や経験に基づいて信念を持っており、ソーシャルネットワーク内で意見を共有することによってこの信念が更新され、集団が共通の信念を形成するかを記述するモデルである。

2.1 既存モデルの概要

社会の中で特定の個人はソーシャルネットワークに属している。個人はネットワーク内で意見を発信・交換することで学習し、意見を更新し、再び意見の発信・交換する。このように各個人の信念はネットワーク内の相互作用により形成されこれに基づいて意思決定をする。

また集団で意思決定をするときには意見の一致、すなわち合意が必要であり、個人の意見と個人間の信頼、集団内における個人の影響力などの要因によって集団の合意形成がされる。この過程を数理的に表した DeGroot モデル [1] が存在し、個人と集団の相互作用により合意へ達するがシンプルに表されている。

このモデルによって表現することのできる実社会における現象のイメージを図 2.1 に示す。この図にあるように全員が同時に意見を出し個人と集団の相互作用によって合意が形成される過程を示し、会議や集会といった現象を表すことができる。

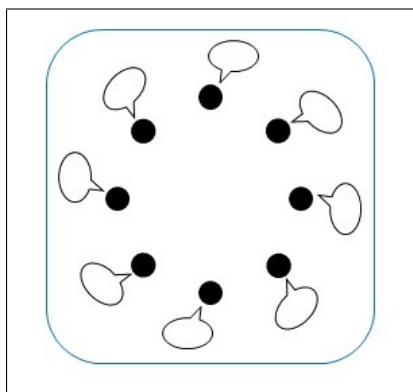


図 2.1 既存モデルのイメージ

2.2 信念更新ルール

同じソーシャルネットワーク内に属する集団 $\mathcal{N} = \{1, \dots, K\}$ を考え、各個人が抱く信念を数値化したものを $\mathbf{F}(0)$ で表す K 次元列ベクトルで与える。

$$\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} F_1(0) \\ F_2(0) \\ \vdots \\ F_K(0) \end{pmatrix}$$

ここで各 $F_i(0)$ は個人 i の初期状態の信念（ある命題が真であるなど）を示している。また、

$$\mathbf{F}(n) = \begin{pmatrix} F_1(n) \\ F_2(n) \\ \vdots \\ F_K(n) \end{pmatrix}$$

をタイムスロット n における K 人の信念ベクトルとする。個人 i が信念 $F_i(n)$ を更新するとき、更新された i の信念は集団内にある信念 $F_1(n-1), \dots, F_K(n-1)$ の線形結合で表現できると仮定する。これは個人 $i (i \in \mathcal{N})$ がソーシャルネットワーク内にいる他の個人 $j (j \in \mathcal{N})$ の信念を知っている場合情報や専門知識を信念に適応させるために、 i 自身の信念 $F_i(n)$ を更新することは当然である

また p_{ij} ($i, j \in \mathcal{N}$) により個人 i が信念を更新するときに個人 j に割り当てる重みを表し任意の i, j に対し

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$$

と仮定する

したがって、個人 i は集団内の他の個人の信念 $F_1(0), \dots, F_K(0)$ から学ぶことができ、集団内にある信念の線形結合で表せるという仮定から、個人 i の信念は $F_i(0)$ から

$$F_i(1) = \sum_{j=1}^K p_{ij} F_j(0) \quad (2.1)$$

で表すように、離散時間のタイムスロット 0 から 1 ステップ経過したタイムスロット 1 において信念を更新する。

次に、 p_{ij} ($i, j \in \mathcal{N}$) の要素を $K \times K$ 確率行列 \mathbf{P} で以下のように示す。

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K1} & p_{K2} & \dots & p_{KK} \end{pmatrix}$$

この行列 \mathbf{P} は各行の要素の和が 1 に等しいため確率行列となっている。

このように行列を表すことによってソーシャルネットワーク内でされる信念の更新は

$$\mathbf{F}(1) = \mathbf{P}\mathbf{F}(0) \quad (2.2)$$

と表すことができ、集団内の各個人が信念更新する様子をモデル化することができる。

(2.1) 式および (2.2) 式で示すように、初期状態から集団内の各個人が他の個人の信念を知った後で、 K 人の個人の信念は $F_1(0), \dots, F_K(0)$ から $F_1(1), \dots, F_K(1)$ に変化する。

個人 i は自分自身の信念が $F_i(0)$ から $F_i(1)$ に変化したことを知っていて、集団内の他の $K - 1$ 人の個人にも信念が変化したことが伝わっていると仮定する。もし、個人 i が個人 j の信念の変化を知り重み p_{ij} によって自身の信念の更新をしたいとするとこの信念更新ルールを保つために、個人 i は再び線形結合によって以下のように信念の更新をしなければならない。

$$F_i(2) = \sum_{j=1}^K p_{ij} F_j(1) \quad (2.3)$$

以上のように信念更新のプロセスは続けられる (図 2.2 参照)。

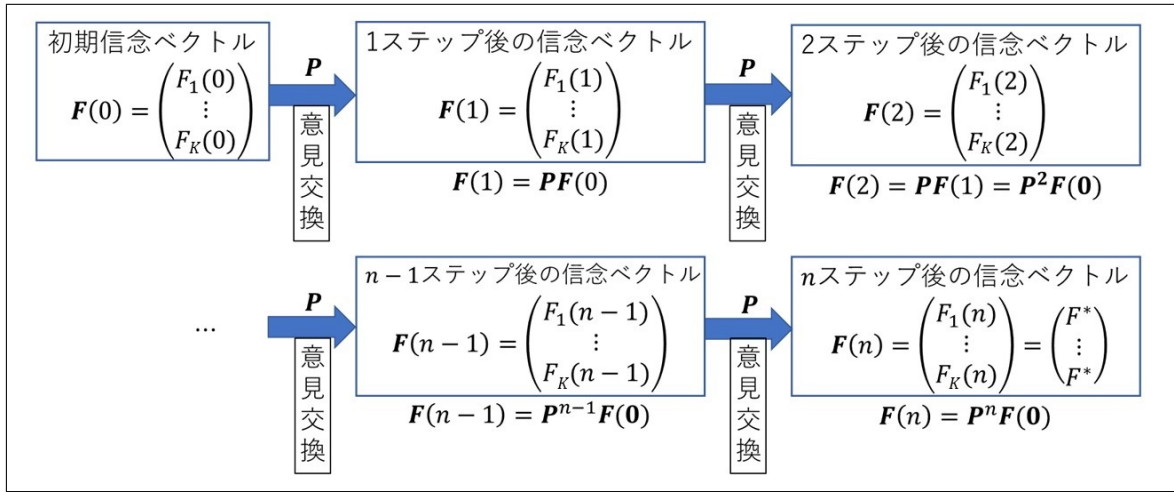


図 2.2 既存モデルの信念更新プロセス

各個人が自分自身の信念の最新の変化を考慮に入れるための線形結合を用いて信念更新しようとする、各更新がさらに別の信念更新となる。

$F_i(n)$ を個人 i ($i \in \mathcal{N}$) が n ($n = 1, 2, \dots$) 回信念更新した後の信念とすると、集団内の信念ベクトル $F(n)$ は以下のように表せる。

$$F(n) = \begin{pmatrix} F_1(n) \\ F_2(n) \\ \vdots \\ F_K(n) \end{pmatrix}$$

以上のことから、2ステップ後の信念は、

$$F(2) = PF(1) = P^2F(0)$$

と表すことができ、一般に次のように表すことができる。

$$F(n) = PF(n-1) = P^nF \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

信念更新を無限回するか、 $F(n+1) = F(n)$ となるまでソーシャルネットワーク内では信念更新をすと仮定するため、それ以上の信念更新は個人の信念を更新しないとする。

2.3 仮定

ここでは集団内の個人が線形信念更新ルールにしたがって信念更新を時間的に管理するルールを設ける。その仮定には以下の2つのルールがある。

1. エージェントが信念更新をするときに使用する重みに関するルール
2. ネットワーク内の各個人が無期限に他の個人の信念に影響を与えることを保証するルール

それぞれについて以下で述べる。

最初の仮定は線形信念更新ルール (2.4) 式にしたがって信念更新するときに使用する重みに関する仮定である。これらは非負であり行の和が1となるように決められており、各重み p_{ij} については個人 i と個人 j がネットワーク上で繋がっている場合にのみ非ゼロとなる。そのとき各個人が集団内のすべての個人の信念に対して時間的に永続的に影響することを保証するために、すべての正の重み p_{ij} はある正のスカラ η によって0から一定値離れることをすべての個人 i, j について仮定する。

これは正式に以下のように仮定する。

仮定 1. 重みに関するルール

1. 以下のようにすべての個人 $i \in \mathcal{N}$ に対して $0 < \eta < 1$ となるスカラ η が存在する。
 - (a) $p_{ii} \geq \eta$ (個人 i の自分自身の重み)
 - (b) $p_{ij} \geq \eta$ (個人 i が個人 j の意見を受けて信念更新する場合)
 - (c) $p_{ij} = 0$ (個人 i と個人 j が繋がっていない場合)
2. すべての個人 i に対して重み p_{ij} は非負であり、すべての j について和をとると1になる。すなわち以下を満たす。

$$p_{ij} \geq 0 \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して}), \quad \sum_{j=1}^K p_{ij} = 1 \quad (\text{すべての } i \text{ に対して})$$

よって仮定1の下では、行が p_{i1}, \dots, p_{iK} となる行列 \mathbf{P} に対して確率行列となる。

次にソーシャルネットワークの接続性に関する仮定を与える。

正の重み p_{ij} が非ゼロである集合を \mathcal{E} で定義する。すなわち、

$$\mathcal{E} = \{(i, j) \mid p_{ij} > 0\} \quad (2.5)$$

で集合 \mathcal{E} を定義する。このとき、有向グラフ $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ に関して接続性の仮定を与える。

仮定 2. 接続性に関するルール

有向グラフ $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ は強連結である。すなわち任意の $i, j \in \mathcal{N}$ に対して集合 \mathcal{E} のリンクを用いて個人 i と個人 j を結ぶ有向パスが存在する。

この仮定2の下では、すべての個人が複数の有向リンクを通ることにより他のすべての個人と通信することが保証される。この仮定2がなければ有向グラフ \mathcal{N}, \mathcal{E} によって表されたソーシャルネットワークは複数の非通信部分に分割されるのでこのように仮定を与える。

ネットワーク内の個人 i から j までの最短経路の長さを d_{ij} とすると、任意のネットワーク内の個人 $i, j \in \mathcal{N}$ 間の最短経路長を示すことができる。すなわち、

$$d = \max_{i, j \in \mathcal{N}} d_{ij} \quad (2.6)$$

によって最大の最短経路長を定義する [2]。これは仮定 2 の観点から明確に定義されたオブジェクトである。

2.4 収束分析

この節では 2.2 節で示した線形信念更新ルールに従うときに 2.3 節に示した仮定の下でネットワーク内の意見が一致する、すなわち合意が形成されること、またその場合に使用される重みについての定理を述べる。

合意形成とは、意見が収束するだけでなく各個人の意見が一致することであり、初期状態の意見 $F_i(0)$ から n 回意見の交換・更新した後の意見 $F_i(n)$ において

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = F^* \quad (i \in \mathcal{N}) \quad (2.7)$$

となる F^* が存在することが合意に達することを表し、ネットワーク内の意見が一致することを示す。

既存モデルにおいて、重み行列 \mathbf{P} は時刻に依存せず一定であることから時刻 s から時刻 n への遷移は (2.4) 式から以下のように示せる。

$$\mathbf{F}(n) = \mathbf{P}^{n-s} \mathbf{F}(s) \quad (2.8)$$

行列の各要素について示すと以下のように書き換えることができる。

$$F_i(n) = \sum_{j=1}^K [\mathbf{P}^{n-s}]_{ij} F_j(s) \quad (2.9)$$

最初に、2.3 節の仮定から導かれる重み行列の性質について述べる。

仮定 1 にしたがって設定された重み行列 \mathbf{P} は確率行列となっているので、マルコフ連鎖の推移確率行列とみなすことができる [3]。また仮定 2 は既約であることを述べており、状態数が有限であるため正再帰的であり、 $d > 1$ のときにおいても d 乗することにより必ずすべての行列の要素が正の値を持つ。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ の行列の要素に関しても正の値を持ち、任意の状態 i, j 間に移動することが可能である。

そのためあらかじめ (2.6) 式で定義された最大最短経路 $d = 1$ としてこの Degroot モデルが合意へ収束することの証明をする。すなわち、

$$[\mathbf{P}]_{ij} \geq \eta \quad (\text{すべての個人 } i, j \text{ に対して}) \quad (2.10)$$

で示すように重み行列 \mathbf{P} のすべての要素はゼロから一様に離れているとする。

(2.4) 式にある線形信念更新ルールに従うとき、少なくとも 1 度信念更新をすることにより信念ベクトル $\mathbf{F}(n)$ の最大要素と最小要素の差が減少することを補題 1 に示す。

補題 1. 任意の $\mathbf{F}(0) \in \mathbb{R}^K$ が与えられたとき、線形信念更新ルールによって生成された系列を $\{\mathbf{F}(n)\}$ とする。時刻 s から時刻 $s+1$ に信念更新がされるとき以下の式が成り立つようなスカラー $\mu > 0$ が存在すると仮定する。

$$[\mathbf{P}]_{ij} \geq \mu \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して}) \quad (2.11)$$

すべての時刻 $n \geq 0$ について $M(n) \in \mathbb{R}$ と $m(n) \in \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$M(n) = \max_{i \in \mathcal{N}} F_i(n) \quad , \quad m(n) = \min_{i \in \mathcal{N}} F_i(n) \quad (2.12)$$

このとき, すべての時刻 $s \geq 0$ と $K\mu \leq 1$ に対して次の式が成立する.

$$M(s+1) - m(s+1) \leq (1 - K\mu)(M(s) - m(s))$$

Proof. 線形信念更新ルールより, 任意の $i \in \mathcal{N}$ について,

$$F_i(s+1) = \sum_{j=1}^K [\mathbf{P}]_{ij} F_j(s) \quad (\text{すべての } s \geq 0)$$

この更新ルールを以下のように書き換える.

$$F_i(s+1) = \sum_{j=1}^K \mu F_j(s) + \sum_{j=1}^K [\hat{\mathbf{P}}]_{ij} F_j(s) \quad (2.13)$$

ここで, 行列 $\hat{\mathbf{P}}$ の要素について新しく以下のように定義する.

$$[\hat{\mathbf{P}}]_{ij} = [\mathbf{P}]_{ij} - \mu \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して})$$

したがって仮定した (2.11) 式より,

$$[\hat{\mathbf{P}}]_{ij} F_j(s) \geq 0 \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して})$$

さらに重み行列 \mathbf{P} は確率行列であることから, 任意の行の和が 1 となるため

$$\sum_{j=1}^K [\hat{\mathbf{P}}]_{ij} = 1 - K\mu$$

である.

上記の 2 つの関係から, $1 - K\mu \geq 0$ と

$$(1 - K\mu) m(s) \leq \sum_{j=1}^K [\hat{\mathbf{P}}]_{ij} F_j(s) \leq (1 - K\mu) M(s)$$

ここで, $M(s)$ と $m(s)$ は前に定義したものである.

この関係式と (2.13) 式より,

$$(1 - K\mu) m(s) \leq F_i(s+1) - \sum_{j=1}^K \mu F_j(s) \leq (1 - K\mu) M(s)$$

この関係式はすべての i について成り立つので,

$$(1 - K\mu) m(s) \leq m(s+1) - \sum_{j=1}^K \mu F_j(s)$$

$$M(s+1) - \sum_{j=1}^K \mu F_j(s) \leq (1 - K\mu) M(s)$$

がそれぞれ成り立つ. これらから以下の結果を得る.

$$M(s+1) - m(s+1) \leq (1 - K\mu)(M(s) - m(s)) \quad (\text{すべての } s \geq 0 \text{ に対して})$$

□

この補題 1 の仮定している (2.11) 式は既約であることを示すものである。補題 1 はこの仮定の下で、線形信念更新ルールによって確率行列を左から掛けることにより、現在の信念ベクトルから 1 ステップ後の最大要素と最小要素の差の系列は単調減少することを示している。

(2.4) 式に示す線形信念更新ルールに従うとき、初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ が合意値に収束することを定理に示す。証明には以上に示した補題を使用する。

定理 1. 2.2 節にある線形信念更新ルールに基づいて生成された系列 $\{F_i(n)\}$ ($i \in \mathcal{N}$) は合意に達する値 F^* に収束する。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = F^* \quad (i \in \mathcal{N})$$

で示す合意値 F^* が存在し、合意値 F^* は初期信念ベクトルの線形結合で表現することができ、

$$F^* = \sum_{j=1}^K \pi_j F_j(0)$$

ここで、 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_K]$ を定常確率ベクトルといい、初期信念ベクトルに依存することなく決まり確率ベクトルとなっている。すなわち、

$$\pi_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^K \pi_j = 1 \quad (\text{すべてのエージェント } j \text{ に対して})$$

を満たす。

Proof. 重み行列 \mathbf{P} が一定でネットワーク内の各個人が信念更新をするとき、ネットワーク内の信念が収束して合意値 F^* に収束することを示す。

(2.10) 式より任意のネットワーク内の個人 $i, j \in \mathcal{N}$ に対して、

$$[\mathbf{P}]_{ij} \geq \eta$$

が成立している。これは補題 1 の仮定している (2.11) 式を満たすので補題 1 を適用することができる。

よってスカラー μ を $\mu = \eta$ とすることにより、

$$M(s+1) - m(s+1) \leq (1 - K\eta)(M(s) - m(s)) \quad (\text{すべての } s \geq 0 \text{ に対して}) \quad (2.14)$$

が成立する。

この式は線形信念更新ルールによって生成された系列 $\{F(n)\}$ から最大要素と最小要素をとりだし、その差を並べて生成した系列 $\{M(n) - m(n)\}$ が単調減少することを示している。また $M(n)$ と $m(n)$ の定義より下限は明らかに 0 となり下に有界である。よって系列 $\{M(n) - m(n)\}$ は下に有界で単調減少するので収束する。

また (2.14) 式は $K\eta \geq 1$ に対して成り立つため、 n ($n \geq 1$) 回意見交換すると 1 未満の数を掛けているため最大要素と最小要素の差は小さくなる。よって少なくとも 1 回信念を更新するとネットワーク内の信念の差は小さくなるがいえ。

これらのことから時刻 $n \rightarrow \infty$ としたとき、以下のように表せる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(n) - m(n) = 0$$

重み行列 \mathbf{P} は確率行列であり、さらに系列 $M(n)$ と $m(n)$ は有界で単調であるので同じ極限に収束することがわかる。これを F^* で表す。また $M(n)$ と $m(n)$ の定義より、

$$m(n) \leq F_i(n) \leq M(n) \quad (\text{すべての } i \text{ と時刻 } k \geq 0 \text{ に対して})$$

以上のことから $F_i(n)$ はすべての個人 i に対して同じ極限 F^* に収束する。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = F^* \quad (\text{すべての } i \text{ に対して})$$

が成り立ち定理の前半部分が成立する。

次に線形更新ルール (2.9) において $s = 0$ とするとすべての個人 i に対して、

$$F_i(n) = \sum_{j=1}^K [\mathbf{P}^n]_{ij} F_j(0) \quad (2.15)$$

ここで先程得た結果から、任意の初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ に対してその極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = \sum_{j=1}^K \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^n]_{ij} F_j(0)$$

が存在し、個人 i とは独立している。したがって初期信念ベクトルは任意であることから $\mathbf{F}(0)$ を任意の個人 h に対して \mathbf{e}_h (h 行目の要素が 1 で他のすべての要素が 0 に等しいベクトル) としたときに得られる極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = \sum_{j=1}^K \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^n]_{ij} F_j(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^n]_{ih} F_h(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^n]_{ih}$$

が存在し個人 i と独立している。この極限値を π_h と表し、式 (2.15) に代入すると以下を得る。

$$F^* = \sum_{j=1}^K \pi_j F_j(0)$$

ここで、 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_K]$ は初期信念ベクトルに依存しない定常確率ベクトルであり、すべてのエージェント j に対して、

$$\pi_j \geq 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^K \pi_j = 1$$

を満たす。 □

2.5 数値例

2.4 節で結果として得られた定理 1. が示す、仮定 1 および仮定 2 の下で信念更新ルールに従って生成された系列 $\{F_i(n)\}$ ($i \in \mathcal{N}$) は、任意の初期状態信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ に対して合意に達する値 F^* に収束することを数値例によって示す。

例 1. 集団内に 3 人の個人がいる場合、すなわち $K = 3$ について考える。初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ を

$$\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

で与える。初期状態の信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ にある要素はそれぞれの個人が抱えている信念を数値化したものであり、 i 行目の要素は個人 i が抱く信念を表している。この集団において個人 1 と個人 3 が最も離れた信念を有していて、(2.12) 式と同様に $M(n)$ と $m(n)$ を定義すると、 $M(0) = 30, m(0) = 10$ であり信念の差は $M(0) - m(0) = 20$ となる。

また、重み行列 \mathbf{P} を

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

で与える。重み行列 \mathbf{P} の各要素 p_{ij} は、個人 i が個人 j をどの程度信頼しているかを示しており、このネットワークにおいて個人 1 はネットワーク上で繋がっている個人 2, 3 に自分と等しい重みを割り当てている。個人 2 については近隣の個人 1, 3 に自分の重みの半分の重みを割り当てており自分自身の信頼が最も高い個人となっている。個人 3 も同様に自分自身に最も高い信頼を与えていることがこの行列からわかる。以上のことから重み行列 \mathbf{P} から集団 $K = 3$ において形成されているネットワークは図 2.3 で示すことができる。

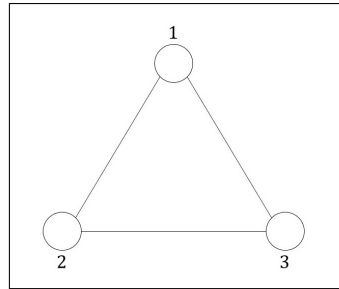


図 2.3 集団 $K = 3$ のネットワーク

このとき、重み行列 \mathbf{P} の任意の要素は非負であり任意の行の和は 1 となっているため仮定 1 を満たし、個人 1, 2, 3 に関して任意の個人間に有向パスが存在するので仮定 2 を満たす。

このように初期条件を与えたとき、(2.1) 式および (2.2) 式にある線形信念更新ルールによって信念更新がされると合意が形成されることを各ステップの最大の信念と最小の信念の差が減少することにより以下で示す。

初めにタイムスロット 0 からタイムスロット 1 へと遷移する集団内の信念更新を示す。

$$\mathbf{F}(1) = \mathbf{P}\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

タイムスロット 1 のとき最大の信念 $M(1) = 25$ となり、最小の信念 $m(1) = 20$ となっているので信念の差は $M(1) - m(1) = 5$ と 1 回意見交換することによって集団内の信念の差は 20 から 5 に減少している。

次に、タイムスロット 1 からタイムスロット 2 へと遷移する集団内の信念更新を示す。

$$\mathbf{F}(2) = \mathbf{P}\mathbf{F}(1) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.667\dots \\ 21.25 \\ 23.333\dots \end{pmatrix}$$

または、初期状態の信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ から 2 タイムスロット遷移したとすると、

$$\mathbf{F}(2) = \mathbf{P}^2\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 5/24 & 1/4 & 13/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.667\dots \\ 21.25 \\ 23.333\dots \end{pmatrix}$$

このように少なくとも一度意見交換を行い信念更新をすると、ネットワーク内に存在する信念の差は単調に減少し合意が形成される過程が表現されている。

信念更新プロセスを $F(n+1) = F(n)$ となるまで集団内で信念更新を行うとしているため、信念が収束するまで信念更新ルールにしたがって数値計算をすると、繰り返し回数 $n = 18$ で最大と最小の信念の差が 10^{-6} 以下となるので、合意に達したとして繰り返しを終了する。ネットワーク内に存在する信念の差について 図 2.4 に示し、合意に達したときの結果を以下で示す。

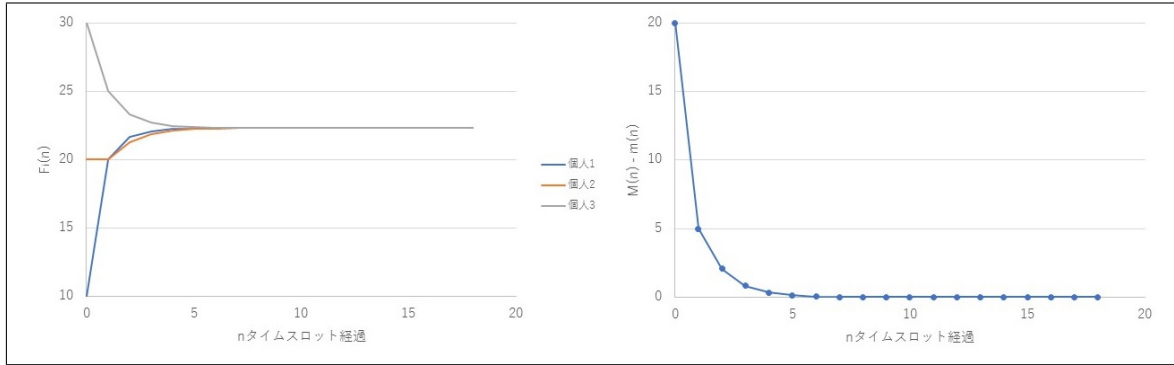


図 2.4 ネットワーク内に存在する信念の差 $M(n) - m(n)$

$$F(18) = P^{18} F(0) = \begin{pmatrix} 0.230769 & 0.307692 & 0.461538 \\ 0.230769 & 0.307692 & 0.461538 \\ 0.230769 & 0.307692 & 0.461538 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.308 \dots \\ 22.308 \dots \\ 22.308 \dots \end{pmatrix}$$

定理 1 における合意に達した値 F^* はここで $F^* = 22.308$ であり、その際に使用される重み π は $\pi = (0.230769, 0.307692, 0.461538)$ であることが結果からわかる。ここで定常確率ベクトル π は、

$$\pi_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^k \pi_j = 1 \quad (\text{すべてのエージェント } j \text{ に対して})$$

を満たし、確率ベクトルとなっている。また合意に達した値 F^* をみると、初期状態の信念ベクトル $F(0)$ と定常確率ベクトル π の線形結合となっているため、 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ は集団内でのその個人 i の強さを表しており、実社会においてネットワーク内での個人の影響力を表していると考えられる。

例 2. 次に図 2.5 に示すように例 1 のネットワークに新たな個人 4 が加わった $K = 4$ 人で構成されたネットワークについて考える。

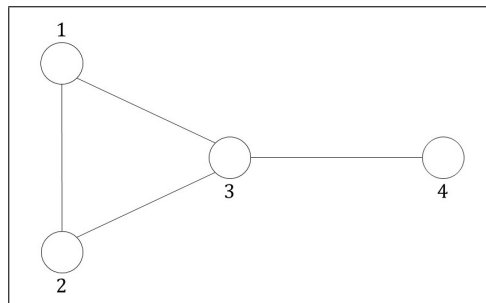


図 2.5 集団 $K = 4$ のネットワーク

例 1 のネットワークは全員が直接通信可能であったが、例 2 のネットワークにおいて個人 4 は個人 3 を通じてのみ個人 1, 2 と通信可能であるというネットワークになっている。

初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ を

$$\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

で与える．例 1 と同様に $M(n)$ と $m(n)$ を定義すると， $M(0) = 40, m(0) = 10$ であり信念の差は $M(0) - m(0) = 30$ となる．また，重み行列 \mathbf{P} を

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

で与える．例 1 のネットワークに新たに個人 4 が個人 3 とのみ繋がっているため個人 1 および個人 2 の個人 4 に対する重みは 0 となっている．また個人 3 についてこのネットワーク上のすべての個人と繋がっており個人 4 に対して最も大きい重みを割り当てている．

このとき，重み行列 \mathbf{P} の任意の要素は非負であり任意の行の和は 1 となっているため仮定 1 を満たし，個人 1, 2, 3 に関してはそれぞれについて有向パスが存在し個人 4 に関して個人 3 と通信することによって個人 1, 2 を結ぶ有向パスが存在するので仮定 2 を満たす．また (2.6) 式で定義された最大の最短経路長はここで $d = 2$ となっている．

このように初期条件を与えたとき，例 1 と同様に合意が形成されることを以下に示す．

初めにタイムスロット 0 からタイムスロット 1 へと遷移する集団内の信念更新を示す．

$$\mathbf{F}(1) = \mathbf{P}\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix}$$

タイムスロット 1 のとき最大の信念 $M(1) = 35$ となり，最小の信念 $m(1) = 20$ となっているので信念の差は $M(1) - m(1) = 15$ と 1 回意見交換することによって集団内の信念の差は 30 から 15 に減少している．

次に，タイムスロット 2 へと遷移する集団内の信念更新を示す．

$$\mathbf{F}(2) = \mathbf{P}^2\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/4 & 1/6 \\ 1/4 & 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 1/6 & 3/8 & 1/3 \\ 1/12 & 1/12 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.333\dots \\ 22.5 \\ 29.166\dots \\ 32.5 \end{pmatrix}$$

タイムスロット 2 のとき最大の信念 $M(2) = 32.5$ となり，最小の信念 $m(2) = 22.5$ となっているので信念の差は $M(2) - m(2) = 10$ と 1 回意見交換することによって集団内の信念の差は初期状態の $M(0) - m(0) = 30$ から $M(2) - m(2) = 10$ に減少している．また (2.10) 式の仮定をおくときに述べたように，最大の最短経路長が $d = 2$ であるようなネットワークに対して重み行列 \mathbf{P} を d 乗した \mathbf{P}^2 をみるとすべての要素で正の値となっており 0 から一様に離れていることがわかる．

このように少なくとも一度意見交換を行い信念更新をすると，ネットワーク内に存在する信念の差は単調に減少し合意が形成される過程が表現されている．

信念が収束するまで信念更新ルールにしたがって数値計算をすると，繰り返し回数 $n = 39$ で最大と最小の信念の差が 10^{-6} 以下となるので，合意に達したとして繰り返しを終了する．ネットワーク内に存在する信念の差について図 2.6 に示し，合意に達したときの結果を以下で示す．

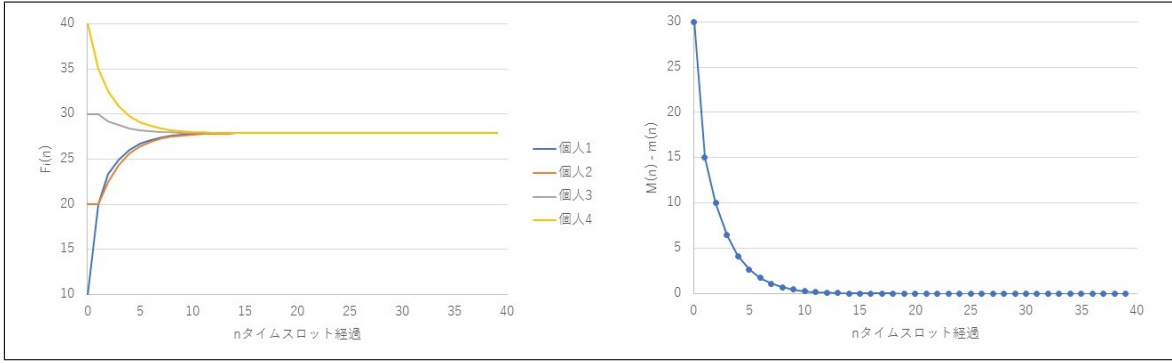


図 2.6 ネットワーク内に存在する信念の差 $M(n) - m(n)$

$$F(39) = P^{39} F(0) = \begin{pmatrix} 0.157895 & 0.210526 & 0.315789 & 0.315789 \\ 0.157895 & 0.210526 & 0.315789 & 0.315789 \\ 0.157895 & 0.210526 & 0.315789 & 0.315789 \\ 0.157895 & 0.210526 & 0.315789 & 0.315789 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.894 \dots \\ 27.894 \dots \\ 27.894 \dots \\ 27.894 \dots \end{pmatrix}$$

定理 1. における合意に達した値 F^* はここで $F^* = 27.894$ であり，その際に使用される重み π は $\pi = (0.157895, 0.210526, 0.315789, 0.315789)$ であることが結果からわかる。

例 1 および例 2 で示したように既存モデルは 2.3 節で述べた仮定を満たすことで，ネットワーク内の信念の差は減少し合意が形成されることがわかり，そのため合意に達するかを判断することが簡単にすることができる。このモデルにおいて初期値の初期状態信念ベクトルと重み行列を与えることで合意に達する値はただ一つに決まりネットワーク内の信念が収束する。また合意に達する場合の使用される重みは定常確率ベクトル π でありこれは定常方程式 $\pi P = \pi$ を解くことによって明示的に計算することができる。ここで π は，ネットワーク内における個人の影響力を表しており集団内での個人の強さを知らるためのパラメータとなっている。

このように既存モデルはプロセスが直感的であるため広くバリエーションの研究がされている [4][5]。また合意形成に達するまでの意見交換の回数の研究も行われている [6]。

第 3 章

SNS における集団的意思決定モデル

この章では 2 章にある既存モデルの変形し、意見の投稿を集団内の各個人に固有の頻度として確率を与え、その確率に基づいて意見投稿がされ集団の信念分布が変化するというモデルを考える。

3.1 提案モデルの概要

既存モデルは離散時間の 1 ステップあたりに全員が意見を出し信念更新を行うという現象を考えていた。提案モデルは離散時間の 1 ステップあたりにソーシャルネットワーク内の 1 人のみが意見を出し、それに基づいてその個人と繋がっているソーシャルネットワーク内にいる他の個人が信念の更新をするという現象を考える。

このようにモデルを変形する理由として、全員が同時に意見を出すという現象が実社会において起こることは考えにくく、会議や SNS 上でのやり取りを考えると意見を出すことができるのは 1 ステップあたり 1 人であり、その意見に基づいて信念の更新をしながら集団での合意が形成されると考えた方が現象をよくとらえているためである。

このモデルによって表現することのできる実社会における現象のイメージを図 3.1 に示す。この図にあるようにネットワーク内の 1 人が意見を投稿し、ネットワーク上で繋がっている他の個人がその意見に基づいて信念更新し、個人と集団の相互作用によって合意が形成される過程を示し、SNS サービス上でのやり取りや全員の発言が期待されない会議といった現象を表すことができる。

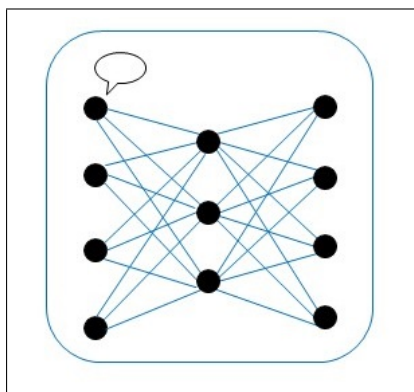


図 3.1 提案モデルのイメージ

3.2 信念更新ルール

この節では3.1節で示すように確率的に既存モデルの重み行列 \mathbf{P} が変化するモデルについて考える。

同じソーシャルネットワーク内に属する集団 $\mathcal{N} = \{1, \dots, K\}$ を考える。ネットワーク内の個人は経験や知識に基づいて初期状態 $F_i(0)$ という信念を抱いており $\mathbf{F}(0)$ によって初期の信念ベクトルを示す。既存モデルと同様に信念を更新するときネットワーク内にある信念と線形結合で表現できると仮定し、

$$\mathbf{F}(n) = \begin{pmatrix} F_1(n) \\ F_2(n) \\ \vdots \\ F_K(n) \end{pmatrix}$$

をタイムスロット n における K 人の信念を表す信念ベクトルとする。

ネットワーク内の個人 $i \in \mathcal{N}$ が意見投稿しその意見に基づいて他のネットワーク内にいる個人 $j \in \mathcal{N} (i \neq j)$ が信念更新するという現象をモデル化する。そのためにネットワーク内の個人 i に対して確率 p_i を与え、意見を投稿する確率とする。ここで p_i は確率であることから正で和が1となるように意見投稿する確率を与える。すなわち、

$$p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^K p_i = 1$$

を満たす。この確率にしたがって選ばれた個人 i に対して他のネットワーク内の個人が信念更新するときに使用する重みを並べた行列 \mathbf{W}_i とし、行列 \mathbf{W}_i は意見投稿する人 i によって異なる行列とする。各行列 \mathbf{W}_i に関しては既存モデルと同様に確率行列となるように行列の要素を決定する。

重み行列 \mathbf{W}_i をネットワーク内に存在する人数の K 通り設定することで、既存モデルにおける重み行列 \mathbf{P} が確率的に変化するのを意見投稿する人により他のネットワーク内の人の信念更新が異なり、1ステップ後の信念は K 通りの可能性が存在する。

上記に示した信念更新ルールを以下のようにまとめて表現することができる：

$$\mathbf{F}(n+1) = \mathbf{W}(n)\mathbf{F}(n) \quad (3.1)$$

ここですべての $i \in \mathcal{N}$ に対して、 $\mathbf{W}(n)$ は

$$\mathbf{W}(n) = \begin{cases} \mathbf{W}_1 & \text{with probability } p_1 \\ \mathbf{W}_2 & \text{with probability } p_2 \\ \vdots & \\ \mathbf{W}_K & \text{with probability } p_K \end{cases} \quad (3.2)$$

この各個人に対する重み行列 $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_K$ は確率行列であり、すべての n にわたって独立で同一に分布していると仮定する。

ここで(3.1)式および(3.2)式に従う信念更新ルールにおいて重みを示す行列 $\mathbf{W}(n)$ の期待値を $\tilde{\mathbf{W}}$ で定義すると、

$$\mathbb{E}[\mathbf{W}(n)] = \tilde{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^K p_i \mathbf{W}_i \quad (n \geq 0) \quad (3.3)$$

で示すように期待値を計算することができる。

信念更新のプロセスは、既存モデルと同様に各ステップにおける信念更新が異なっていることから重みによって個人 i と個人 j が再び線形結合によって信念更新をする（図 3.2 参照）。

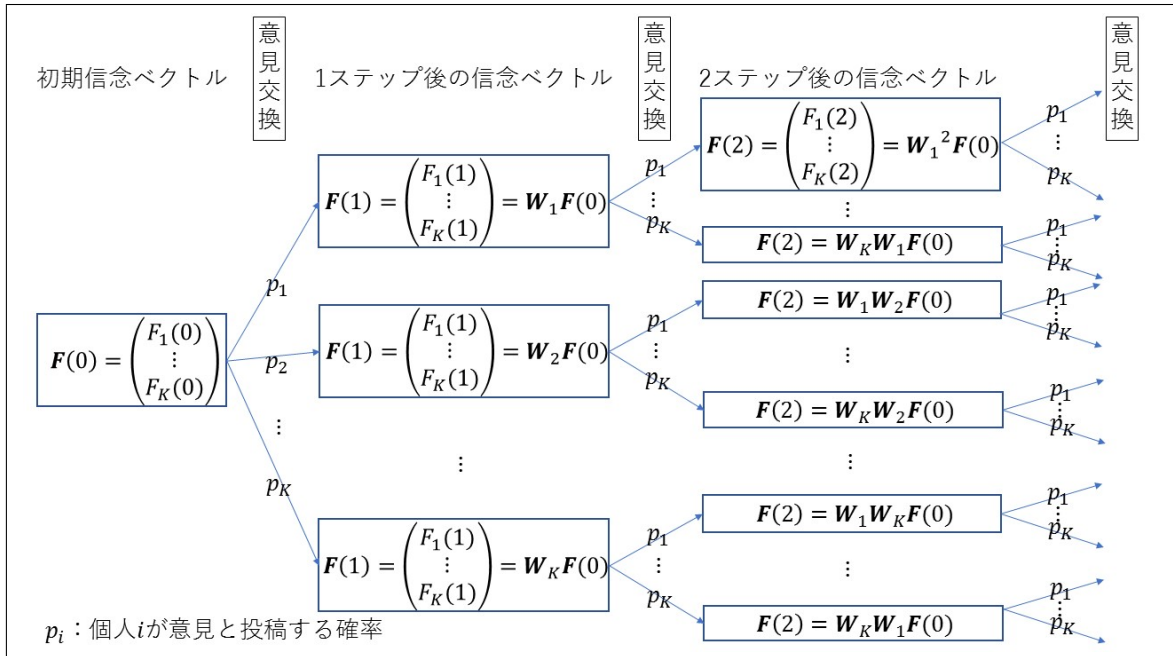


図 3.2 提案モデルの信念更新プロセス

重み行列 W_i が個人 i によって変化するため、1 ステップ後の信念ベクトルは意見投稿した人に依存し K 通りのパスが存在する。さらに 1 ステップ経過すると同様に K 通りのパスが存在するので 2 ステップ後の信念更新を考えると K^2 通りのパスが存在する。

このように (3.1) 式および (3.2) 式にある線形信念更新ルールにしたがって信念更新をするとき重み行列 $W(n)$ は変化するので、合意に達する値は意見が投稿された順序に依存する。

3.3 仮定

この節では、既存モデルと同様に次の節で収束分析するとき使用する信念更新を時間的に管理するルールを設ける。その仮定には以下の 2 つのルールがある。

1. 各個人に対して与える重み行列 W_i の要素に関するルール
2. ネットワーク内の各個人が無期限に他の個人の信念に影響を与えることを保証するルール
3. 各個人が自分の信念を他の個人に伝える頻度に関するルール

それぞれについて以下で述べる。

最初の仮定は (3.1) 式および (3.2) 式で示す信念更新ルールにしたがって信念更新するとき使用する重み行列 W_i の要素に関する仮定である。提案モデルで使用する重み行列は意見を投稿した人に基づいて他の個人が信念更新する様子を表現するためにネットワーク内の個人 1 人に対して 1 つずつ与える。既存モデルと同様に信念が収束する様子を後の節で分析するために各重み行列 W_i に使用する重みは非負であり和が 1 となるように決める。さらに各要素に対しての仮定 3 を与える。

仮定 3. 各重み行列 \mathbf{W}_i に対して重みの要素は以下を満たす.

(a) i 行目の要素は i 列目の要素が 1 でその他の要素は 0 とする. すなわち,

$$[\mathbf{W}_i]_{ii} = 1, \quad [\mathbf{W}_i]_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

(b) $j(i \neq j)$ 行目の要素は i 列目に関して 0 以上 1 未満の数であるとする. すなわち,

$$[\mathbf{W}_i]_{ji} \geq 0 \quad (i \neq j)$$

個人 i と j がネットワーク上で直接繋がっていない場合に限り 0 とする. すなわち,

$$[\mathbf{W}_i]_{ji} = 0 \quad (i \neq j)$$

(c) 対角要素である $j(i \neq j)$ 行 j 列の要素は 1 から (b) にある値を引いた数を要素とする. すなわち,

$$[\mathbf{W}_i]_{jj} = 1 - [\mathbf{W}_i]_{ji} \quad (i \neq j)$$

(d) (a), (b), (c) に示した以外の要素はすべて 0 とする.

仮定 3 の (a) は意見を投稿する確率によって選び出された個人 i に対して他の個人からの情報を受け取らないために自分自身の重みの要素を 1 として信念が変化しないことを表している. これは実社会において当然のことであり, 意見投稿した人は信念更新をしないということを保証している.

次に (b), (c) は重み行列の要素は行に関して多くとも 2 つの要素しか正の数の重みを持たず, 他の要素は 0 であることを示している. これは意見投稿した人以外の個人 j に対して自分自身と意見投稿した人 i の 2 つの信念の線形結合により信念更新をすることを表している. このとき個人 i と個人 j がネットワーク上で直接通信できない場合は個人 j には意見が届かないために重み行列 \mathbf{W}_i の要素 $[\mathbf{W}_i]_{jj}$ を 1 として個人 j は信念更新をしないことを表す.

よって仮定 3 の下では, 各個人 i に対して設定した重み行列 \mathbf{W}_i は確率行列となる.

次にソーシャルネットワークの接続性に関する仮定を与える.

正の重み p_{ij} が非ゼロである集合を \mathcal{E} で定義する. すなわち,

$$\mathcal{E} = \{(i, j) \mid p_{ij} > 0\} \quad (3.4)$$

で集合 \mathcal{E} を定義する. このとき, 有向グラフ $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ に関して接続性の仮定を与える.

仮定 4. 接続性に関するルール

有向グラフ $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ は強連結である. すなわち任意の $i, j \in \mathcal{N}$ に対して集合 \mathcal{E} のリンクを用いて個人 i と個人 j を結ぶ有向パスが存在する.

この仮定 4 の下では, すべての個人が複数の有向リンクを通ることにより他のすべての個人と通信することが保証される. この仮定 4 がなければ有向グラフ \mathcal{N}, \mathcal{E} によって表されたソーシャルネットワークは複数の非通信部分に分割されるのでこのように仮定を与える.

ネットワーク内の個人 i から j までの最短経路の長さを d_{ij} とすると, 任意のネットワーク内の個人 $i, j \in \mathcal{N}$ 間の最短経路長を示すことができる. すなわち,

$$d = \max_{i, j \in \mathcal{N}} d_{ij} \quad (3.5)$$

によって最大の最短経路長を定義する. これは仮定 4 の観点から明確に定義されたオブジェクトである.

3.4 収束分析

この節では既存モデルと同様に，3.2節で示した線形信念更新ルールに従うときに3.3節に示した仮定の下で合意が形成されることを定理によって示す．合意形成とは(2.5)式で定義した n 回信念更新をした後にネットワーク内の信念が一致すること，すなわち，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = F^* \quad (i \in \mathcal{N})$$

となる合意値 F^* が存在することである．

最初に仮定から導かれる平均重み行列の性質について述べる．

それぞれの個人に対して与える \mathbf{W}_i は仮定3より確率行列であるので，(3.3)式のように確率 p_i を掛けすべての和をとった平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ についても確率行列となっている．

このことから平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ をマルコフ連鎖の推移確率行列とみなすことができる．仮定4は既約であることを述べているので同様の理由からあらかじめ(3.5)式で定義された最大の最短経路を $d = 1$ としてこのモデルが合意へ収束することを証明する．すなわち，

$$[\tilde{\mathbf{W}}]_{ij} \geq \eta \quad (\text{すべての個人 } i, j \text{ に対して}) \quad (3.6)$$

で示すように平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ のすべての要素はゼロから一様に離れているとする．

(3.6)式はネットワーク内の任意の個人 i, j 間で有向パスが存在することを述べており，個人 i が意見投稿したときネットワーク内にいるすべての個人に意見が届いていることを示している．すなわち仮定3(b)にある任意の個人 i についてその個人の重み行列 $[\mathbf{W}_i]_{ji}$ の要素が非ゼロとなるように重み行列の要素を設定する．

次に(3.1)式および(3.2)式にある線形信念更新ルールに従うとき，信念ベクトル $\mathbf{F}(n)$ の最大要素と最小要素の差の期待値が減少することを補題2に示す．

補題 2. 任意の $\mathbf{F}(0) \in \mathbb{R}^K$ が与えられたとき，線形信念更新ルールによって生成された系列を $\{\mathbf{F}(n)\}$ とする．すべての $n \geq 0$ について $M(n) \in \mathbb{R}$ と $m(n) \in \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$M(n) = \max_{i \in \mathcal{N}} F_i(n), \quad m(n) = \min_{i \in \mathcal{N}} F_i(n)$$

このとき，すべての $s \geq 0$ と $K\eta \leq 1$ に対して次の式が成立する．

$$\mathbb{E}[M(s+1) - m(s+1)] \leq (1 - K\eta)(M(s) - m(s))$$

ここで，スカラー $\eta > 0$ は(3.6)式で定義したものである．

Proof. 線形信念更新ルールより，確率 p_h により選び出された個人 h が意見を投稿したとき，任意の $i \in \mathcal{N}$ について

$$F_i(s+1) = \sum_{j=1}^K [\mathbf{W}_h]_{ij} F_j(s) \quad (\text{すべての } s \geq 0)$$

意見投稿する人 h が確率的に代わるので，重み行列 \mathbf{W}_h は確率的に変化しその期待値は(3.3)式で定義した行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ であり，1ステップ経過後の信念の期待値は以下のように表現することができる．任意の $i \in \mathcal{N}$ について

$$\mathbb{E}[F_i(s+1)] = \sum_{j=1}^K [\tilde{\mathbf{W}}]_{ij} F_j(s) \quad (\text{すべての } s \geq 0)$$

ここで平均の重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ は (3.8) 式で示すように任意の成分が正となっている。すなわち、

$$[\tilde{\mathbf{W}}]_{ij} \geq \eta \quad (\text{すべての個人 } i, j \text{ に対して})$$

を満たしている。

この更新ルールを以下のように書き換える。

$$\mathbb{E}[F_i(s+1)] = \sum_{j=1}^K \eta F_j(s) + \sum_{j=1}^K [\hat{\mathbf{W}}]_{ij} F_j(s) \quad (3.7)$$

ここで、行列 $\hat{\mathbf{W}}$ の要素について新しく以下のように定義する。

$$[\hat{\mathbf{W}}]_{ij} = [\tilde{\mathbf{W}}]_{ij} - \eta \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して})$$

したがって (3.6) 式より

$$[\hat{\mathbf{W}}]_{ij} F_j(s) \geq 0 \quad (\text{すべての } i, j \text{ に対して})$$

さらに平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ は確率行列であることから、任意の行の和が 1 となるため

$$\sum_{j=1}^K [\tilde{\mathbf{W}}]_{ij} = 1 - K\eta$$

である。

上記の 2 つの関係から、 $1 - K\eta \geq 0$ と

$$(1 - K\eta) m(s) \leq \sum_{j=1}^K [\hat{\mathbf{W}}]_{ij} F_j(s) \leq (1 - K\eta) M(s)$$

ここで、 $M(s)$ と $m(s)$ は前に定義したものである。

この関係式と (3.7) 式より、

$$(1 - K\eta) m(s) \leq \mathbb{E}[F_i(s+1)] - \sum_{j=1}^K \eta F_j(s) \leq (1 - K\eta) M(s)$$

この関係式はすべての i について成り立つので

$$(1 - K\eta) m(s) \leq \mathbb{E}[m(s+1)] - \sum_{j=1}^K \eta F_j(s)$$

$$\mathbb{E}[M(s+1)] - \sum_{j=1}^K \eta F_j(s) \leq (1 - K\eta) M(s)$$

がそれぞれ成り立つ。これらから以下の結果を得る。

$$\mathbb{E}[M(s+1) - m(s+1)] \leq (1 - K\eta)(M(s) - m(s)) \quad (\text{すべての } s \geq 0 \text{ に対して})$$

□

K 通り存在する重み行列の期待値である平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ によってネットワーク内の各個人が信念更新するとき信念ベクトル $\mathbf{F}(n)$ の期待値について考える。

補題 2 より, すべての時刻 $s \geq 0$ と $K\eta \leq 1$ に対して,

$$\mathbb{E}[M(s+1) - m(s+1)] \leq (1 - K\eta)(M(s) - m(s)) \quad (3.8)$$

が成立する.

線形信念更新ルールによって生成された系列 $\{\mathbf{F}(n)\}$ から最大要素と最小要素をとりだし, その差を並べて生成した系列の期待値 $\{\mathbb{E}[M(n) - m(n)]\}$ は (3.8) 式から単調減少であることがわかる. $M(n) - m(n)$ は定義より, 信念ベクトルの最大要素と最小要素の差であるため下限は 0 であり下に有界であるので, その期待値の下限も 0 となる. よって系列 $\{\mathbb{E}[M(n) - m(n)]\}$ は下に有界で単調減少するので収束する.

また (3.8) 式は $K\eta \leq 1$ に対して成り立つため, n ($n \geq 1$) 回意見交換すると 1 未満の数を掛けているため最大要素と最小要素の差は小さくなる. よって少なくとも 1 回信念を更新することでネットワーク内の信念の差は小さくなるがいえる.

これらのことから時刻 $n \rightarrow \infty$ としたとき, 以下のように表せる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M(n) - m(n)] = 0 \quad (3.9)$$

この式は 3.2 節で定義した線形信念更新ルールによって生成された信念ベクトル $\mathbf{F}(n)$ の最大要素と最小要素の期待値は時刻 $n \rightarrow \infty$ としたとき 0 に収束することを表している.

次に各試行における信念ベクトル $\mathbf{F}(n)$ の最大要素と最小要素の差, すなわち $M(n) - m(n)$ について考える.

仮定 3 にしたがって定めた任意の確率行列 \mathbf{W}_i を線形信念更新ルールにしたがって左から掛けたとき少なくとも 1 ステップ経過すると信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ の最大要素と最小要素の差は減少することを以下の補題 3 に示す.

補題 3. 任意の初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ が与えられたとき, 線形信念更新ルールによって生成された系列を $\{\mathbf{F}(0)\}$ とする. 時刻 s から時刻 $s+1$ に信念更新がされるとき補題 2 と同様に $M(n), m(n)$ を定義する. このとき, すべての時刻 $s \geq 0$ に対して次の式が成立する.

$$M(s+1) - m(s+1) \leq M(s) - m(s)$$

Proof. ネットワーク内の任意の個人 h が確率的に選り出され意見投稿したとき, 時刻 s から時刻 $s+1$ への信念更新は (3.1) 式および (3.2) 式より,

$$\mathbf{F}(s+1) = \mathbf{W}_h \mathbf{F}(s) \quad (\text{すべての時刻 } s \geq 0 \text{ に対して})$$

これを信念ベクトル $\mathbf{F}(s+1)$ の各要素ごとに表すと

$$F_i(s+1) = \sum_{j=1}^K [\mathbf{W}_h]_{ij} F_j(s) \quad (\text{すべての時刻 } s \geq 0 \text{ に対して})$$

ここで仮定 3 から重み行列 \mathbf{W}_h の 0 となる要素があることから

$$F_h(s+1) = [\mathbf{W}_h]_{hh} F_h(s) = F_h(s) \quad (\text{選り出された個人 } h \text{ に対して}) \quad (3.10)$$

$$F_j(s+1) = [\mathbf{W}_h]_{jh} F_h(s) + [\mathbf{W}_h]_{jj} F_j(s) \quad (\text{個人 } j \ (j \neq h) \text{ に対して}) \quad (3.11)$$

と書き換えることができる。この等式は重み行列 \mathbf{W}_h が対角要素と h 列目のみ正の数の要素を有しているため成り立つ。(3.10) 式は提案モデルの意見投稿した人に関して信念更新をしないという現象を示している。そのため以下では (3.11) で示される信念更新する個人 j に対する最大要素と最小要素の差の減少について考える。

重み行列 \mathbf{W}_h の要素の中で正の数が存在する最小の要素をスカラー $\delta > 0$ とおき、以下のように与える。

$$\delta = \min \left\{ \min_{j \in \mathcal{N}} [\mathbf{W}_h]_{jj}, \min_{(j,h) \in \mathcal{E}} [\mathbf{W}_h]_{jh} \right\} \quad (3.12)$$

重み行列 \mathbf{W}_h の非ゼロの要素に関して次の不等式が成り立つ。

$$[\mathbf{W}_h]_{ij} \geq \delta \quad (\text{ある } i, j \text{ に対して}) \quad (3.13)$$

ここで (3.11) 式を以下のように書き換える。

$$F_j(s+1) = \delta F_h(s) + \delta F_j(s) + [\hat{\mathbf{W}}_h]_{jh} F_h(s) + [\hat{\mathbf{W}}_h]_{jj} F_j(s) \quad (\text{個人 } j \ (j \neq h) \text{ に対して}) \quad (3.14)$$

ここですべての個人 j ($j \neq h$) に対して、 $[\hat{\mathbf{W}}_h]_{jh}$ と $[\hat{\mathbf{W}}_h]_{jj}$ について新しく以下のように定義する。

$$[\hat{\mathbf{W}}_h]_{jh} = [\mathbf{W}_h]_{jh} - \delta, \quad [\hat{\mathbf{W}}_h]_{jj} = [\mathbf{W}_h]_{jj} - \delta$$

したがって (3.13) 式より、

$$[\hat{\mathbf{W}}_h]_{ij} F_j(s) \geq 0 \quad (\text{ある } i, j \text{ に対して})$$

さらに重み行列 \mathbf{W}_h は確率行列であることから、任意の行の和が 1 となるため、

$$\sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{W}}_h]_{ij} = [\hat{\mathbf{W}}_h]_{jh} + [\hat{\mathbf{W}}_h]_{jj} = 1 - 2\delta$$

となる。

上記の 2 つの関係から、 $1 - 2\delta \geq 0$ と

$$(1 - 2\delta)m(s) \leq \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{W}}_h]_{ij} F_j(s) = [\hat{\mathbf{W}}_h]_{jh} F_h(s) + [\hat{\mathbf{W}}_h]_{jj} F_j(s) \leq (1 - 2\delta)M(s)$$

ここで、 $M(s)$ と $m(s)$ は前に定義したものである。

この関係式と (3.14) 式より、

$$(1 - 2\delta)m(s) \leq F_j(s+1) - \delta F_h(s) - \delta F_j(s) \leq (1 - 2\delta)M(s)$$

この関係式はすべての j について成り立つので

$$(1 - 2\delta)m(s) \leq m(s+1) - \delta F_h(s) - \delta F_j(s)$$

$$M(s+1) - \delta F_h(s) - \delta F_j(s) \leq (1 - 2\delta)M(s)$$

がそれぞれ成り立つ。これらから以下の結果を得る。

$$M(s+1) - m(s+1) \leq (1 - 2\delta)(M(s) - m(s)) \quad (\text{すべての時刻 } s \geq 0 \text{ に対して}) \quad (3.15)$$

スカラー δ は正であるので 1 より小さい数を掛けているため時刻 s から時刻 $s+1$ に信念更新がされると信念ベクトルの最大要素と最小要素の差は減少することを示している。(3.15) 式は (3.11) 式から導かれているため、確率的に選出された個人 h 以外の任意の個人に対して成立する。個人 h を除く任意

の個人 j に対して最大要素と最小要素の差が減少するため個人 h を含めたネットワーク内全員の信念ベクトルの最大要素と最小要素の差に対しても減少することがいえる。すなわち、

$$M(s+1) - m(s+1) \leq M(s) - m(s) \quad (\text{すべての時刻 } s \geq 0 \text{ に対して})$$

となり補題 3 が成立する。 □

(3.1) 式および (3.2) 式で示す線形信念更新ルールにしたがうとき、任意の初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ が合意値に収束することを定理に示す。証明には以上に示した補題を使用する。

定理 2. 3.2 節にある線形信念更新ルールに基づいて生成された系列 $\{F_i(n)\}$ ($i \in \mathcal{N}$) は合意に達する値 F^* に収束する。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = F^* \quad (\text{すべての } i \text{ に対して確率 1 で})$$

を示す確率変数 F^* が存在し、合意に達する。合意値 F^* は初期信念ベクトルの線形結合で表現することができ、

$$F^* = \sum_{j=1}^K \pi_j F_j(0)$$

ここで、 $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_K]$ は初期信念ベクトルに依存することなく決まるランダムベクトルであり、

$$\pi_j \geq 0 \quad (\text{すべてのエージェント } j \text{ に対して}), \quad \sum_{j=1}^K \pi_j = 1$$

を満たす確率ベクトルとなっており、各試行により変化するため合意値 F^* と同様に確率変数となっている。

Proof. 重み行列がネットワーク内の人数 K 通り存在し、確率的に選出された個人が意見を投稿し他のネットワーク内の各個人が信念更新をするとき、ネットワーク内の信念が収束して合意値 F^* に収束することを示す。(3.9) 式より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M(n) - m(n)] = 0$$

が成立しているため 3.2 節にある線形信念更新ルールにしたがって生成された信念ベクトル $\mathbf{F}(n)$ の期待値は収束することがいえる。

任意の時刻 n に対して $\mathbf{W}(n)$ は確率行列となっており、補題 3 から系列 $\{M(n) - m(n)\}$ は非増加であるので、単調収束定理 [7][8] より

$$\mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} M(n) - m(n) \right] = 0$$

が成立し、この等式が成立するためには期待値が 0 となるためには、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(n) - m(n) = 0$$

が成り立つ。時刻 n を $n \rightarrow \infty$ とすることにより、信念ベクトル $\mathbf{F}(n)$ の最大要素と最小要素が一致するので、信念ベクトルのすべての要素が等しくなる。以上のことから $F_i(n)$ はすべての個人 i に対して同じ極限 F^* に収束する。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = F^* \quad (\text{すべての } i \text{ に対して})$$

が成り立ち定理の前半部分が成立する。

ここで時刻 s から時刻 n への遷移を示すために以下の (3.16) 式で表すように遷移行列を定める [9].

$$\Phi(n, s) = \mathbf{W}(n)\mathbf{W}(n-1)\cdots\mathbf{W}(s+1)\mathbf{W}(s) \quad (\text{すべての時刻 } n \geq s \text{ に対して}) \quad (3.16)$$

ここで, $\Phi(n, n) = \mathbf{W}(n)$ (すべての時刻 n に対して) とする.

遷移行列を用いると線形信念更新ルールは以下のように表現できる:

$$F_i(n) = \sum_{j=1}^K [\Phi(n-1, s)]_{ij} F_j(s) \quad (3.17)$$

次に線形更新ルール (3.17) において $s = 0$ とするとすべての個人 i に対して,

$$F_i(n) = \sum_{j=1}^K [\Phi(n-1, 0)]_{ij} F_j(0) \quad (3.18)$$

ここで先程得た結果から, 任意の初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ に対してその極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = \sum_{j=1}^K \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi(n-1, 0)]_{ij} F_j(0)$$

が存在し, 任意のネットワーク内の個人 i について同じ値となる. したがって初期信念ベクトルは任意であることから $\mathbf{F}(0)$ を任意の個人 h に対して \mathbf{e}_h (h 行目の要素が 1 で他のすべての要素が 0 に等しいベクトル) としたときに得られる極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_i(n) = \sum_{j=1}^K \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi(n-1, 0)]_{ij} F_j(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi(n-1, 0)]_{ih} F_h(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi(n-1, 0)]_{ih}$$

が存在し個人 i と独立している. $n \rightarrow \infty$ としたとき遷移行列 $[\Phi(n-1, 0)]_{ih}$ の極限を π_h と表し, 式 (3.18) に代入すると以下を得る.

$$F^* = \sum_{j=1}^K \pi_j F_j(0)$$

ここで $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_K]$ は初期信念ベクトルに依存することなく決まるランダムベクトルであり,

$$\pi_j \geq 0 \quad (\text{すべてのエージェント } j \text{ に対して}), \quad \sum_{j=1}^K \pi_j = 1$$

を満たす確率ベクトルとなっており, 各試行により変化するため合意値 F^* と同様に確率変数となっている. □

定理 2 に示した結果は初期条件を与えたネットワークに対して各試行における合意に達する値 F^* は意見投稿をする人をしてネットワーク内から選び出される人に依存するため, 確率変数となっている. また合意に達する値 F^* は初期状態の信念ベクトルとネットワーク内における個人の影響力を模擬した $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_K]$ の線形結合で表現でき, この $\boldsymbol{\pi}$ についても意見投稿の順番に依存するため, F^* と同様に確率変数となっている.

定理 3 に定理 2 によって各試行において確率変数として結果が得られる合意値 F^* およびネットワーク内の個人の影響力 $\boldsymbol{\pi}$ の期待値に関する結果を示す.

定理 3. 3.2 節にある線形信念更新ルールに基づいて生成された系列 $\{F_i(n)\}$ ($i \in \mathcal{N}$) が合意に達したときの極限の確率変数を F^* によって表す. このとき以下の関係式が成り立つ.

(3.3) 式によって定義した平均重み行列の n 乗の \tilde{W}^n は時刻 n を $n \rightarrow \infty$ としたとき, 同一の行を有する確率行列 $\tilde{\pi} = [\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_K]$ に収束する. すなわち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{W}^n = e\tilde{\pi}$$

が存在する. ここで e は $K \times 1$ 列ベクトルであり要素がすべて 1 とする.

また, F^* の期待値を \tilde{F}^* で表すとすると, 1 で得た $\tilde{\pi}_i$ と個人 i が有する初期状態の信念ベクトル $F_i(0)$ の線形結合で表現することができる. すなわち,

$$\mathbb{E}[F^*] = \tilde{F}^* = \sum_{i=1}^K \tilde{\pi}_i F_i(0) = \tilde{\pi} F(0)$$

により, 初期条件を与えたネットワークに対する合意に達する値の期待値を求めることができる.

Proof. この部分は 2 章で示した定理 1 と同様のことを述べており, 確率行列を繰り返し掛けることで同一の行を有する確率行列に収束することを示す.

(3.1) 式および (3.2) 式にある線形信念更新ルールにしたがって信念更新をする集団に対して 1 ステップ後の意見投稿する人は確率的であることから各試行によって 1 ステップ後の信念は異なる. しかし, 1 ステップ後の集団の信念の期待値はもとめることができるため, ネットワーク上で信念の期待値も同様に合意に達することを示すことができる.

(3.1) 式より 0 から 1 ステップ後の遷移は,

$$F(1) = W(1)F(0)$$

で表現できる. この遷移について両辺の期待値をとると,

$$\mathbb{E}[F(1)] = \mathbb{E}[W(1)F(0)] = p_1 W_1 F(0) + p_2 W_2 F(0) + \dots + p_K W_K F(0)$$

ここで平均重み行列 \tilde{W} による遷移を $\bar{F}(n)$ (すべての時刻 $n \geq 0$) によって示し, 初期状態 $F(0)$ は定数であることから

$$\bar{F}(1) = \{p_1 W_1 + p_2 W_2 + \dots + p_K W_K\} F(0)$$

(3.3) 式の平均重み行列の定義より,

$$\bar{F}(1) = \tilde{W} F(0)$$

によって 1 ステップ後の遷移の期待値を表現することができる.

この信念更新ルールはすべての n にわたって独立であるので, 既存モデルと同様に重み行列が変化しないモデルと考えることが可能で 1 ステップごとの遷移は定数で求めることができる. n ステップ後の信念ベクトルは

$$\bar{F}(n) = \tilde{W}^n F(0) \tag{3.19}$$

によって表現することができる. この線形信念更新ルールは既存モデルにおける (2.15) 式に対応しており, 定理 1 より確率行列 \tilde{W} は定常確率ベクトルを $\tilde{\pi}$ に収束する. ここで平均重み行列 \tilde{W} の極限を $e\tilde{\pi}$ で表すと,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{W}^n = e\tilde{\pi}$$

が成り立ち, 定理の前半部分が成り立つ.

(3.17) 式よりすべての時刻 $n \geq 0$ に対して,

$$\mathbf{F}(n) = \Phi(n-1, 0)\mathbf{F}(0)$$

が成り立つ. さらに $n \rightarrow \infty$ としたとき, $\mathbf{F}(n) \rightarrow F^* \mathbf{e}$ となることから,

$$\mathbb{E}[F^* \mathbf{e}] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(n) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{F}(n)]$$

ここで 2 つ目の等式は単調収束定理から導かれる. (3.1) 式および (3.2) 式に示した線形信念更新ルールのすべての時刻 n にわたって $\mathbf{W}(n)$ は独立に分布しているという仮定から, 前述の 2 つの関係式を組み合わせると

$$\mathbb{E}[F^* \mathbf{e}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\Phi(n-1, 0)\mathbf{F}(0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{W}}^n \mathbf{F}(0)$$

定理の前半部分の関係式より,

$$\mathbb{E}[F^*] = \tilde{F}^* = \tilde{\pi} \mathbf{F}(0)$$

が成り立つ. □

定理 2 は初期状態を与えたネットワークの各試行において合意に達することを示し, そのときの合意に達した値 F^* およびネットワーク内の個人の影響力 π についての結果が示されており, 定理 3 は初期条件を与えたネットワークに対して合意に達する値の期待値 \tilde{F}^* および平均のネットワーク内の影響力 $\tilde{\pi}$ について述べている.

3.5 数値例

3.4 節の結果として得られた定理 2 が示す, 仮定 3 および 4 の下で信念更新ルールにしたがって生成された系列 $\{F_i(n)\}$ ($i \in \mathcal{N}$) は, 任意の初期状態信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ に対して合意に達する値 F^* に収束することを数値例によって示す.

例 3. 例 2 と同様に集団 $K = 4$ の図 2.5 にあるネットワークについて考える. 最初に, 初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ を

$$\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

で与える. (2.12) 式により $M(n)$ と $m(n)$ を定義すると, 例 1 と同様に $M(0) = 40, m(0) = 10$ であり信念の差は $M(0) - m(0) = 30$ となる.

次に意見を投稿する確率をネットワーク内の各個人に対して以下のように与える.

$$p_1 = 0.2, \quad p_2 = 0.1, \quad p_3 = 0.4, \quad p_4 = 0.3$$

ネットワーク内において個人 i の意見投稿確率を $p_i = 0$ とすると, 個人 i と個人 j の有向パスが存在しないため仮定 4 の接続性に関する仮定が満たされない. そのため任意の個人に対する意見投稿確率 p_i は正の値, すなわち $p_i > 0$ とし, 確率であるため総和が 1 となるように設定する.

最後に重み行列 \mathbf{W}_i を仮定 3 を満たすように各個人に対して与える.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

各重み行列 \mathbf{W}_i は行に関して総和が 1 でありそれぞれ確率行列となっている. また個人 4 は個人 1, 2 とネットワーク上で直接繋がっていないため仮定 3(b), (c) から重み行列 $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ の 4 行 4 列目の要素は 1 であり, 同様の理由から重み行列 \mathbf{W}_4 の 1 行 1 列目と 2 行 2 列目の要素も 1 であり, 信念更新しないことを表している. その他の非ゼロの各要素の値に関しては例 1 で述べたように個人 i に対して \mathbf{W}_i の i 列目の値が大きいほどネットワーク内の他の個人から信頼されており, 信念更新するとき使用される重みが大きいことを表している.

重み行列 \mathbf{W}_i のそれぞれの要素からわかるネットワーク内の各個人の特徴として, 個人 1 の信念は大きな影響を個人 2, 3 に対して与え, 個人 2 は個人 1, 3 から信頼されていないため要素が小さくなっており, 個人 3 は標準的にネットワーク内の個人に対して影響を与えることがいえる. 個人 4 に関しては個人 3 のみ直接通信可能であるがその個人 3 に対しては大きな影響を与える存在となっている.

以上で与えられた数値から (3.3) 式で定義した平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ を以下で求める.

$$\tilde{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^K p_i \mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} 0.766\dots & 0.033\dots & 0.2 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & 0.2 & 0 \\ 0.15 & 0.033\dots & 0.576\dots & 0.24 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

定理 3 にあるようにこの平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ から平均のネットワーク内の個人の影響力を並べたベクトル $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3, \tilde{\pi}_4)$ を求めると以下の結果が得られる.

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (0.240641, 0.053475, 0.320855, 0.385026)$$

各試行において個人 i のネットワーク内での影響力 π_i は確率変数であるため各試行ごとに変化するが, その平均値は理論値 $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (0.240641, 0.053475, 0.320855, 0.385026)$ と一致する. また定理 3 の後半部分にある合意に達する値の期待値 \tilde{F}^* は,

$$\tilde{F}^* = \sum_{j=1}^K \tilde{\pi}_j F_j(0) = (0.240641, 0.053475, 0.320855, 0.385026) \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 28.502\dots$$

となる. したがって上記の初期条件を与えたとき, 合意に達する値の結果 F^* は各試行ごとに変化するが, その平均値は理論値 $\tilde{F}^* = 28.502$ と一致する.

初期条件を与えたとき, (3.1) 式および (3.2) 式にある線形信念更新ルールによって信念更新がされると合意が形成されることを各ステップの最大の信念と最小の信念の差が減少することにより以下で示す. 各試行において合意に達する値 F^* が確率的に変化しその結果は意見投稿の順番に依存するため, 初めに試行 1 として結果を示す.

初めにタイムスロット 0 からタイムスロット 1 へと遷移する集団内の信念更新を示す。与えられた確率に従って個人 3 が選出されたとする。このときの信念更新は以下のようになる。

$$\mathbf{F}(1) = \mathbf{W}_3 \mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix}$$

タイムスロット 1 のとき最大の信念 $M(1) = 35$ となり、最小の信念 $m(1) = 20$ となっているので信念の差は $M(1) - m(1) = 15$ と 1 回意見交換することによってネットワーク内に存在する信念の差が減少している。

次に、タイムスロット 1 からタイムスロット 2 へと遷移する集団内の信念更新を示す。この遷移においても個人 3 が選出されたとする。このときの信念更新は以下のようになる。

$$\mathbf{F}(2) = \mathbf{W}_3 \mathbf{F}(1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27.5 \\ 30 \\ 32.5 \end{pmatrix}$$

タイムスロット 2 のとき最大の信念 $M(2) = 32.5$ となり、最小の信念 $m(2) = 25$ となっているので信念の差は $M(2) - m(2) = 7.5$ と 1 回意見交換することによってネットワーク内に存在する信念の差が減少している。このように少なくとも一度意見交換を行い信念更新をすると、ネットワーク内に存在する信念の差は単調に減少し合意が形成される過程が表現されている。

例 1 と同様に信念更新プロセスを $\mathbf{F}(n+1) = \mathbf{F}(n)$ となるまで集団内で信念更新を行うとしているため、信念が収束するまで信念更新ルールにしたがって数値計算をすると、繰り返し回数 $n = 51$ で最大と最小の信念の差が 10^{-6} 以下となるので、合意に達したとして繰り返しを終了する。図 3.3 に合意形成の過程を示し、合意に達したときの結果を以下で示す。

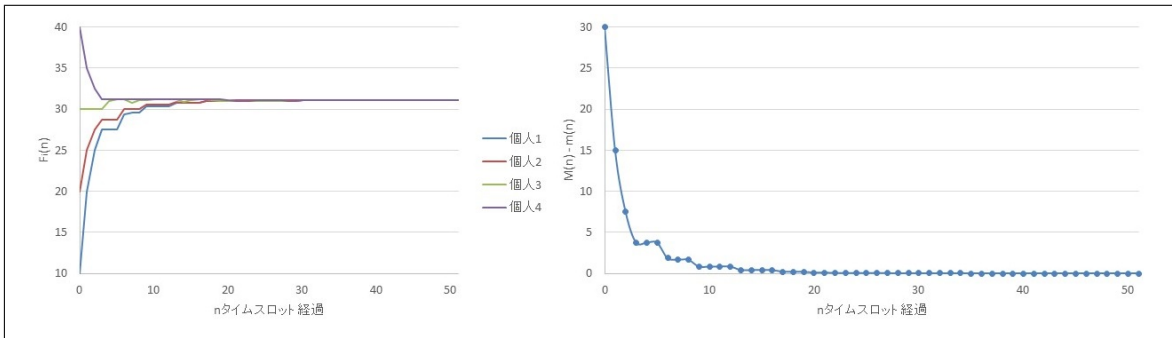


図 3.3 試行 1 における合意形成の過程

$$\mathbf{F}(59) = \begin{pmatrix} 31.048 \dots \\ 31.048 \dots \\ 31.048 \dots \\ 31.048 \dots \end{pmatrix}$$

この試行においての定理 2 における合意に達した値 F^* はここで $F^* = 31.048$ であり、その際に使用される重みは $\pi = (0.0030907, 0.0041004, 0.8776673, 0.1151416)$ となる。

また図 3.3 より信念の差の系列 $\{M(n) - m(n)\}$ は $n = 10$ タイムスロット程度経過したところで差は 1 より小さい値となっているので、合意に達する値はこれまでにネットワーク内に投稿された意見に依存するといえる。この試行 1 において $n = 10$ までに選び出された意見投稿する個人を順にあげると

個人 3 → 個人 3 → 個人 3 → 個人 4 → 個人 4 → 個人 3 → 個人 2 → 個人 4 → 個人 3 → 個人 4

となっていた。初期状態の信念の平均の信念は 25 であるが上記のような意見投稿確率およびネットワークの初期条件を与えることでこの試行においては個人 3 が集団に与える影響力が大きいため合意に達した値 $F^* = 31.048$ と個人 3 の信念に近い値となっている。

次に試行 2 として結果を示す。

初めにタイムスロット 0 からタイムスロット 1 へと遷移する集団内の信念更新を示す。与えられた確率に従って個人 1 が選び出されたとする。このときの信念更新は以下ようになる。

$$F(1) = W_1 F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12.5 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$$

タイムスロット 1 のとき最大の信念 $M(1) = 40$ となり、最小の信念 $m(1) = 10$ となり信念の差は $M(1) - m(1) = 30$ と 1 回意見交換したがネットワーク内に存在する信念の差が減少していない。

次に、タイムスロット 1 からタイムスロット 2 へと遷移する集団内の信念更新を示す。この遷移において個人 3 が選び出されたとする。このときの信念更新は以下ようになる。

$$F(2) = W_3 F(1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 12.5 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 13.75 \\ 15 \\ 27.5 \end{pmatrix}$$

タイムスロット 2 のとき最大の信念 $M(2) = 27.5$ となり、最小の信念 $m(2) = 12.5$ となっているので信念の差は $M(2) - m(2) = 15$ と 1 回意見交換することによってネットワーク内に存在する信念の差が減少している。このように一度意見交換を行い信念更新をすることにより、ネットワーク内に存在する信念の差は非増加となっており、合意が形成される過程が表現されている。

試行 2 では繰り返し回数 $n = 63$ で最大と最小の信念の差が 10^{-6} 以下となるので、合意に達したとして繰り返しを終了する。図 3.4 に合意形成の過程を示し、合意に達したときの結果を以下で示す。

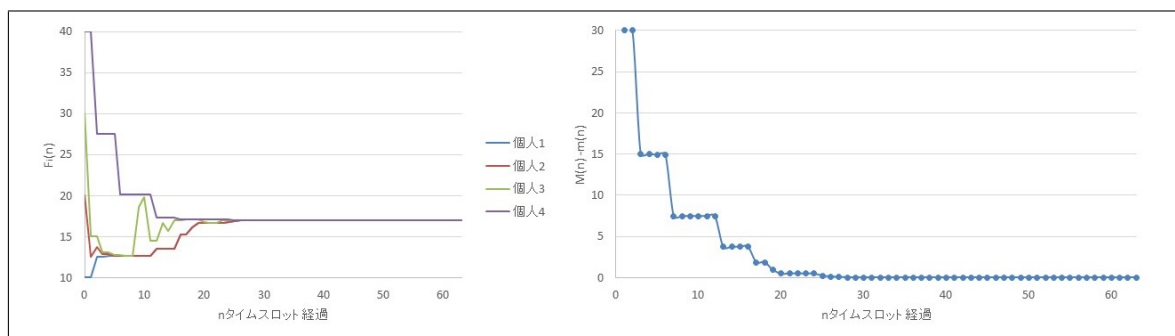


図 3.4 試行 2 における合意形成の過程

$$F(63) = \begin{pmatrix} 16.992\dots \\ 16.992\dots \\ 16.992\dots \\ 16.992\dots \end{pmatrix}$$

この試行における定理 2 における合意に達した値 F^* はここで $F^* = 16.992$ であり、その際に使用される重みは $\pi = (0.7194027, 0.0074784, 0.1276064, 0.1455124)$ となる。

試行 1 と同様に、試行 2 において $n = 10$ までに選び出された意見投稿する個人を順にあげると

個人 1 → 個人 3 → 個人 1 → 個人 2 → 個人 1 → 個人 3 → 個人 1 → 個人 2 → 個人 4 → 個人 4

となっていた。試行 1 と比較し個人 1 の意見投稿が多いことがわかる。このため $\pi_1 = 0.7194027$ とネットワーク内における影響力が大きく、この試行において合意に達した値 $F^* = 16.992$ となっており個人 1 の初期状態の信念 $F_1(0) = 10$ に近い値となっている。

試行 1 および試行 2 で示すように、このモデルにおいて各試行における合意に達する値は意見投稿の順番に依存するため合意に達する値 F^* は確率変数であることがわかる。この試行を 50000 回繰り返したときの F^* の分布を図 3.5 のヒストグラムに示し、繰り返し試行の平均値を以下に示す。

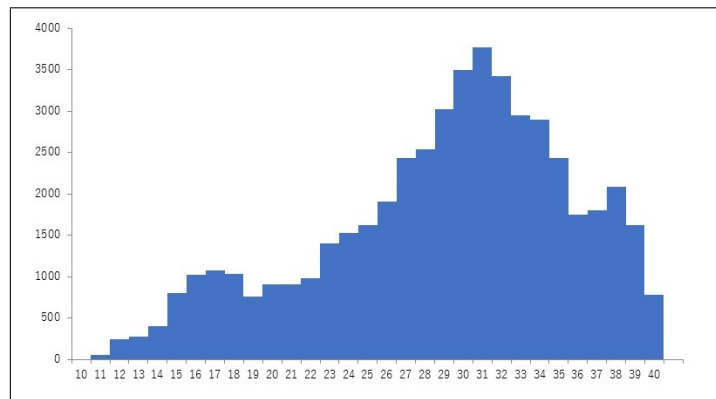


図 3.5 例 2 における確率変数 F^* の分布

繰り返し試行回数 50000 回の平均値 : 28.545

よって、このようなソーシャルネットワークにおいては 30 – 31 の間の信念で合意に達する確率が最も高いことがわかる。これはネットワーク内の影響力に依存しており、それを示す平均定常確率ベクトルは意見の投稿回数 p_i およびその意見が有するネットワークへの影響力を示す W_i の 2 つの要素を含んだパラメータである。このネットワークにおいては大きい方から順に個人 4, 個人 3, 個人 1, 個人 2 となっている。個人 4 の初期状態の信念はネットワーク内の信念の中でも偏っているため信念更新の際に他のネットワーク内の信念の影響を受けやすく、図 3.5 の 40 の頻度が少なく、それより少し小さな値、すなわち極度に偏っていない信念で合意に達しているといえる。また、平均重み行列 \tilde{W} から求めた合意に達する値の期待値 \tilde{F}^* は $\tilde{F}^* = 28.502$ であるのでこの値はほとんど一致している。

次に例 3 にあるネットワークの意見投稿する確率 p_i のみを変化させそのほかの条件は変化させないときの確率変数 F^* の分布について以下の例 4 に示す。

例 4. 例 3 にあるネットワークを使用する。初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ を

$$\mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

で与え、重み行列 \mathbf{W}_i を

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって与える。この初期信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ 、および重み行列 \mathbf{W}_i は例 3 と同じ条件となっている。

最後に意見を投稿する確率をネットワーク内の各個人に対して以下のように与える。

$$p_1 = 0.1, \quad p_2 = 0.7, \quad p_3 = 0.1, \quad p_4 = 0.1$$

先ほどの例 3 において最も π の数値が低い値となっている個人 2 に対して高い確率を与えている。よって 1 回の発言における周りの信頼が低い個人に対して意見投稿回数が多くなるように初期値を与えているネットワークとなっている。

以上で与えられた数値から (3.3) 式で定義された平均重み行列 $\tilde{\mathbf{W}}$ を以下で求める。

$$\tilde{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^K p_i \mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} 0.716 \dots & 0.233 \dots & 0.05 & 0 \\ 0.075 & 0.875 & 0.05 & 0 \\ 0.075 & 0.233 \dots & 0.611 \dots & 0.08 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$$

例 3 と同様にしてこの $\tilde{\mathbf{W}}$ から平均のネットワーク内での影響力 $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3, \tilde{\pi}_4)$ を求めると以下の結果が得られる。

$$\tilde{\pi} = (0.171069, 0.532218, 0.114048, 0.182482)$$

定理 3 にある平均のネットワーク内での影響力と初期状態の信念ベクトル $\mathbf{F}(0)$ の線形結合により求められる合意に達する値の期待値を求めると、

$$\tilde{F}^* = \sum_{j=1}^k \tilde{\pi}_j F_j(0) = (0.171069, 0.532218, 0.114048, 0.182482) \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 23.075 \dots$$

となる。したがって上記の初期条件を与えたとき、各試行において合意に達する値 F^* は確率変数であるため異なる値をとるが、その平均値は理論値 $\tilde{F}^* = 23.075$ と一致する。

同様に同じネットワーク内で合意に達する過程の試行を 50000 回繰り返したときの F^* の分布を図 3.6 のヒストグラムに示し、繰り返し試行の平均値を以下に示す。

$$\text{繰り返し試行回数 50000 回の平均値 : 23.058}$$

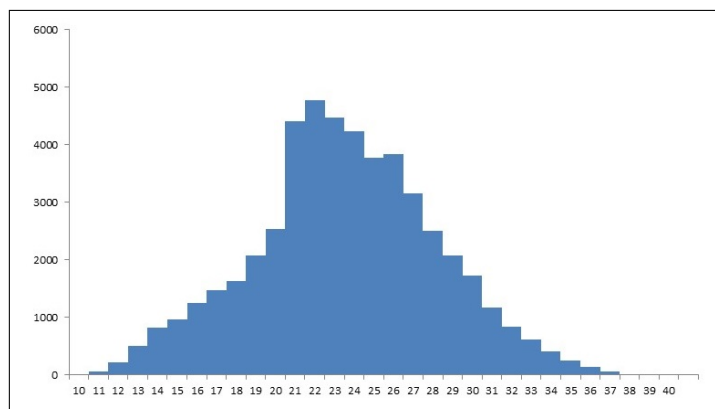


図 3.6 例 2 における確率変数 F^* の分布

よって、このようなソーシャルネットワークにおいては 22 – 23 の間の信念で合意に達する確率が最も高いことがわかる。これは図 3.5 の分布の形状と異なり個人 2 の有している信念に集団が影響されているため例 4 のネットワークでは個人 2 の初期信念 20 付近で合意に達する確率が高くなっている。個人 2 を除いた個人ではネットワーク内での影響力に大きな差はみられず同程度となっているので個人 1 および個人 4 のように偏った信念に収束する確率は低くなっている。

既存モデルでは初期条件を与えたネットワークに対してただ一つの合意に達する値 F^* が決まっていたことに比較し、この提案モデルは意見投稿の順番を考慮しているため合意に達する値 F^* は各試行によって異なることがわかる。その期待値に関しては明示的に計算することができ数値例においてもほとんど同じ平均値となっていた。また提案モデルにおいてネットワーク内の個人の影響力を表すパラメータ π は意見投稿をする確率 p_i と重み行列 W_i の 2 つの要素を含んでおり、この要素によって確率変数 F^* の分布が変化していることが明らかとなった。この 2 つの要素は実社会において、それぞれ p_i は発言する回数、 W_i はその発言の強さを表しており、 π_i が大きいということは周囲への影響力が大きいことをモデル上で示している。

このように既存モデルおよびその変形によって表現した提案モデルでは、プロセスが直感的であるため実社会において何を模擬しているのかについて理解しやすく、個人間の信頼からネットワーク内の信頼を導くことができるなど現実をより表したモデルとなっている。

ネットワーク内で合意に達するかについては仮定 3 および仮定 4 を両方満たせばよいので、合意に達する値が存在するか判断するための簡単な条件が存在する。

提案モデルにおいて繰り返し同じネットワーク内で合意に達する過程をするとき、その期待値は簡単に求めることができ、そのとき使用される重みについても明示的に計算することができる。

このモデルによって表現できる現象は実社会におけるネットワークで初期状態の信念や個人間の信頼などを数値化することにより、同じネットワーク上で繰り返し合意形成を行い合意に達する値が各試行により変化し、その合意に達する値をヒストグラムによって分布の形状がわかる。例えばモデル上で会議を模擬したとき同じネットワーク上にも関わらず定理 2 に示すように会議の結果は会議をするたびに变化し、そのときネットワークの平均的な影響力や合意に達する値の期待値は定理 3 によってあらかじめ計算することができる。

第 4 章

結論

本研究では意見投稿の順番を考慮した DeGroot モデルの変形を用いて実社会における合意形成の過程を数理的に表現し、その合意に達する値は確率変数となっていることがわかった。提案モデルは、実社会の集団を模擬するネットワークの初期条件の与え方によって分布の形状が異なるため、実社会にあるネットワークに対して合意に達する値として得られそうな値を推測することに適用することができる。しかし同じネットワーク内での合意形成は一度きりであるため実際の結果と比較することは困難であることがいえる。今後の目標として、分布の形状がどのパラメータに依存しているのかについて明らかにすることが挙げられる。

また、提案モデルの拡張として (3.1) 式および (3.2) 式で示される信念更新ルールを時刻 n に依存してネットワーク内での個人間の信頼が動的に変化するモデル、信念更新が生じる時間経過を離散時間から連続時間へ拡張する場合に関しても研究していく所存である。

謝辞

本論文を作成するにあたり，指導教員である塩田茂雄先生に多大にご協力いただいたことをここに記し，感謝の意を伝えさせていただきたい。また，塩田先生をはじめとする塩田研究室一同に関しまして常日頃お世話になり，そのうえで本論文が完成したことをここに記し，感謝の意を伝えさせていただきたい。

参考文献

- [1] Morris H. DeGroot, "Reaching a Consensus", *Journal of the American Statistical Association*, Vol.69, pp.118-121, 1974.
- [2] Daron Acemoglu · Asuman Ozdaglar · Ali ParadedhGheibi, "Spread of (mis)information in social networks", *Games and Economic Behavior*, 70, pp.194-227, 2010.
- [3] 中野 張 (2016)「マルコフ過程入門」(「マルコフ解析」講義資料), [online]file:///C:/Users/Stu/Downloads/201602394-2401-0-120(7).pdf (参照 2019-1-31).
- [4] Angelia Nedic' · Asuman Ozdaglar, "Convergence rate for consensus with delays", *J Glob Optim*,47, pp.437-456, 2010.
- [5] Daron Acenoglu · Asuman Ozdaglar, "Opinion Dynamics and Learning in Social Networks", *MIT Open Access Articles*, 1.1, pp.3-49, 2011.
- [6] 塩村尊, 合意形成のための交渉回数に関する一考察, *情報処理学会論文誌*, Vol.50, No.8, pp.1926-1928, 2009.
- [7] 吉田伸生, ルベーク積分入門, 遊星社, 2章, 2006.
- [8] 梅垣 · 大矢 · 塚田, 測度 · 積分 · 確率, 共立出版, 1章, 1987.
- [9] Angelia Nedic' · Asuman Ozdaglar, "Distributed Subgradient Methods for Multi-Agent Optimization", *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, Vol.54, pp.48-61, 2009.