

セルラネットワークにおけるチャネル適応型 ユーザスケジューリング効果の確率幾何解析

山本 高至

京都大学大学院情報学研究科

2017-12-16 第 272 回待ち行列研究部会



- ▶ どのような研究を行ってきたか
My research interests
- ▶ 無線通信におけるマルチパスフェージング
Multipath fading in wireless communications
- ▶ Multi-user scheduler
 - ▶ Proportional fair scheduler
 - ▶ Normalized SNR scheduler
- ▶ セルラネットワークの確率幾何解析の基礎
Elements of stochastic geometry analysis of cellular networks
2017/5 IEICE RCS 研究会依頼講演, 2017/8 CQ 研究会特別招待講演
<http://bit.ly/RCS201705>

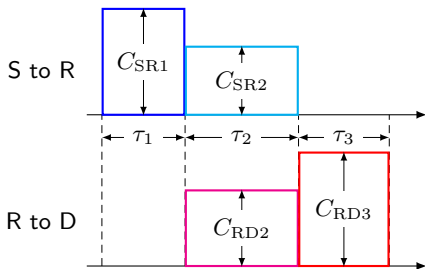
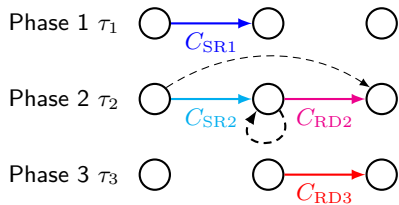
↑ Japanese

↓ English

- ▶ マルチユーザスケジューリングの確率幾何解析
Stochastic geometry analysis of multi-user scheduling
2017/8 IEEE Wireless Communications Letters

- ▶ リソース制御の確率幾何解析 (Prof. Seong-Lyun Kim (Yonsei Univ.), 2016～)
- ▶ カメラ画像の機械学習によるミリ波制御 (西尾理志先生, 2013～)
- ▶ 無線電力伝送 (篠原真毅先生, 2011～)
- ▶ IoT, IEEE 802.11ah (守倉正博先生, 2011～)
- ▶ フルデュプレックス (羽田勝之先生, Dr. Taneli Riihonen, Mr. Sathya N. Venkatasubramanian (Aalto Univ.), Prof. Mikko Valkama, Dr. Ville Syrjäjä, Dr. Dani Korpi (Tampere Univ. Tech.) 2010～)
- ▶ コグニティブ無線, 無線リソース制御 (Prof. Jens Zander (KTH), 2008～)
- ▶ マルチホップセルラ, マルチホップ・アドホック, ゲーム理論 (吉田進先生, 村田英一先生, 2001～)

Proposal and optimal resource allocation of hybrid full-duplex



Optimal resource allocation problem for FDR (linear programming problem)

$$\begin{aligned} & \underset{(\tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\text{maximize}} && t \\ & \text{subject to} && t \leq \tau_1 C_{SR1} + \tau_2 C_{SR2}, \\ & && t \leq \tau_2 C_{RD2} + \tau_3 C_{RD3}, \\ & && \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \tau_3 \geq 0, \\ & && \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Projects

- ▶ Proactive mmWave communication control using 3D environment information, JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (B) 17H03266, FY2017–FY2020.
- ▶ Research and development for realization of 5G networks: Control schemes for utilization of multiple mobile communication networks, MIC, with NICT, ATR, KDDI, NEC, Osaka Univ., FY2015–FY2018.
- ▶ Design of full-duplex communications based on symmetric interactions, JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 15K06062, FY2015–FY2017.

Recent activities

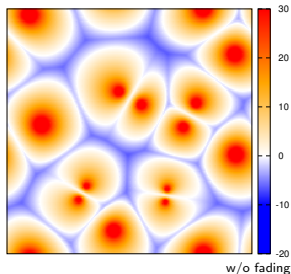
- ▶ Associate Editor, IEEE Wireless Communications Letters, 2017–
- ▶ Track Chair, APCC 2017 and CCNC 2018

1. 確率幾何解析はどの程度一般的に使われているのか？
2. 確率幾何解析の代表的な成果はどういうものか？

Keyword	Number of papers
i.i.d.	199
stochastic geometry	132
convex optimization	106
Poisson point process	104
Shannon	93
Fourier	81
machine learning	57
game theory	49
IoT	167
802.11	127
millimeter/mmWave	112
5G & latency	108
massive MIMO	106
full duplex/full-duplex	75
UAV	26

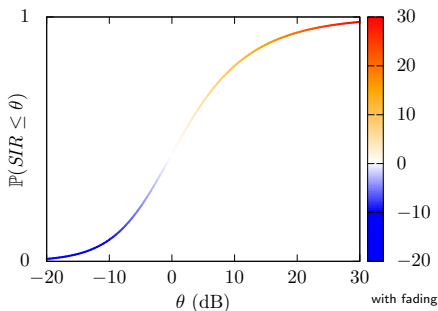
セルラ基地局の位置をポアソン点過程
 ユーザは最近傍基地局に接続 (Poisson-Voronoi cells)
 受信電力変動は指数分布に従う (レイリーフェージング)
 距離減衰定数 $\alpha > 2$

以上の仮定で, SIR の面的分布 (cdf, ccdf) が直接求まり
 $\alpha = 4$ で閉形式
 (ただし, 本スライド全部の理解必要)



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(SIR > \theta) &= \dots \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2\theta}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{\theta} \arctan \sqrt{\theta}} \quad (\alpha = 4) \end{aligned}$$

この論文により, セルラネットワークに
 確率幾何解析が適用可能と示された



加法的白色ガウス雑音通信路 (additive white Gaussian noise (AWGN) channel)

時点 k における通信路への入力 $x[k] \in \mathbb{C}$ と、通信路からの出力ベースバンド信号 $y[k] \in \mathbb{C}$ の間に次の関係がある通信路

$$y[k] = x[k] + n[k], \quad n[k] \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2) \quad (1)$$

周波数非選択性 (狭帯域) レイリーフェージング通信路 (flat Rayleigh fading channel)

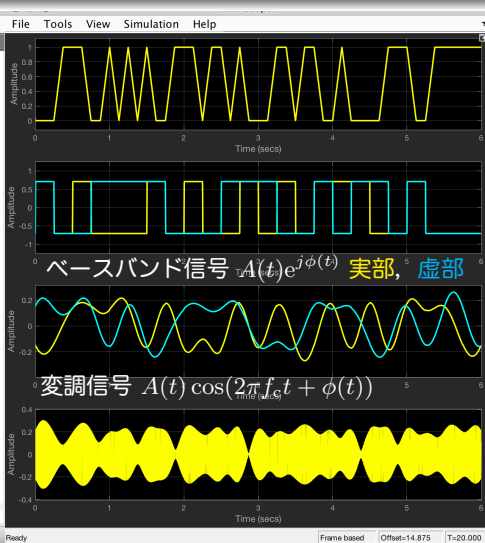
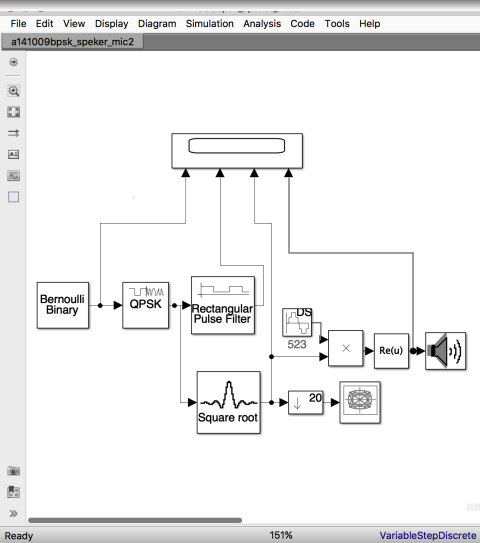
入出力が次式で与えられる通信路において、振幅 (利得) $|g[k]|$ がレイリー分布に従うもの

$$y[k] = g[k]x[k] + n[k]$$

直接波がなく、多数の素波の合成となる場合

確率変数 g が円対称複素ガウス分布に従う場合、確率変数 $|g|$ (包絡線, あるいは単に振幅) はレイリー分布に、確率変数 $|g|^2$ (電力) は指数分布にそれぞれ従う [Jakes1974]

▶ 直感的に分かりそうな説明



▶ 聞いてみましょう

ベースバンド信号

$$A(t)e^{j\phi(t)}$$

変調信号

$$A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

$A(t), \phi(t), f_c \in \mathbb{R}$, f_c : 搬送波周波数

ベースバンド信号 → 変調信号 (送信)

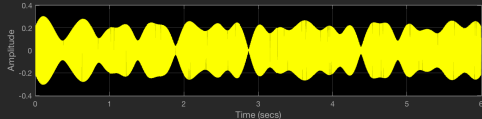
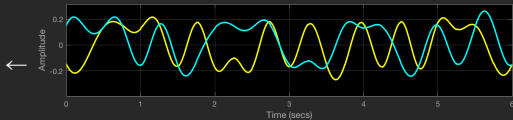
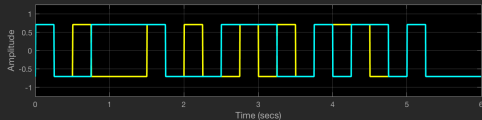
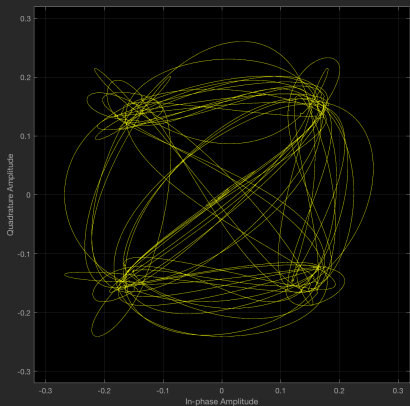
$$\operatorname{Re} \left[\underbrace{A(t)e^{j\phi(t)}}_{\text{ベースバンド信号}} \cdot \underbrace{e^{j2\pi f_c t}}_{\text{搬送波}} \right] = A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

変調信号 → ベースバンド信号 (受信)

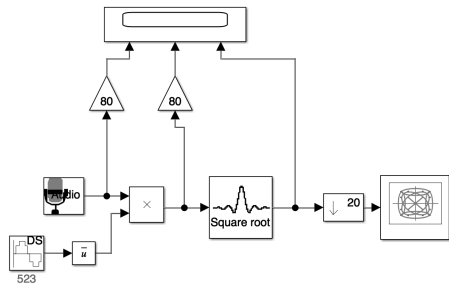
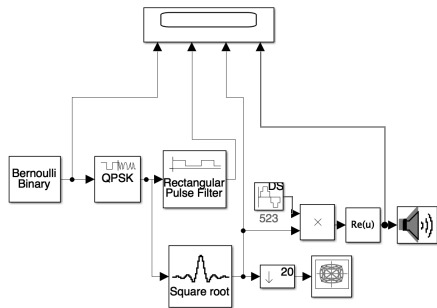
$$\begin{aligned} \underbrace{\langle A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)), e^{j2\pi f_c t} \rangle}_{\text{変調信号}} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \cdot \overline{e^{j2\pi f_c t}} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(t) \frac{e^{j\phi(t)} + e^{-j(4\pi f_c t + \phi(t))}}{2} dt = \frac{1}{2} A(t) e^{j\phi(t)} \end{aligned}$$

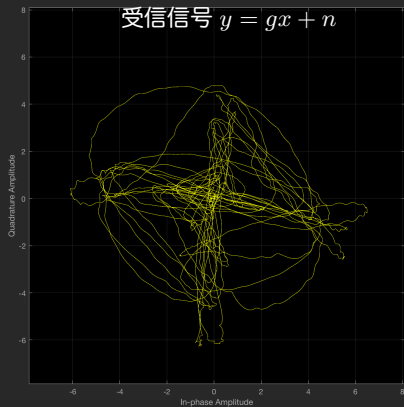
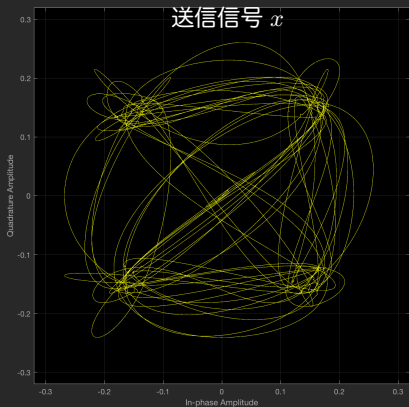
$A(t), \phi(t)$ はシンボル区間 $-T/2 \leq t < T/2$ で一定と仮定. $f_c \gg 1/T$

従って、ベースバンド信号で表現 (等価低域表現)

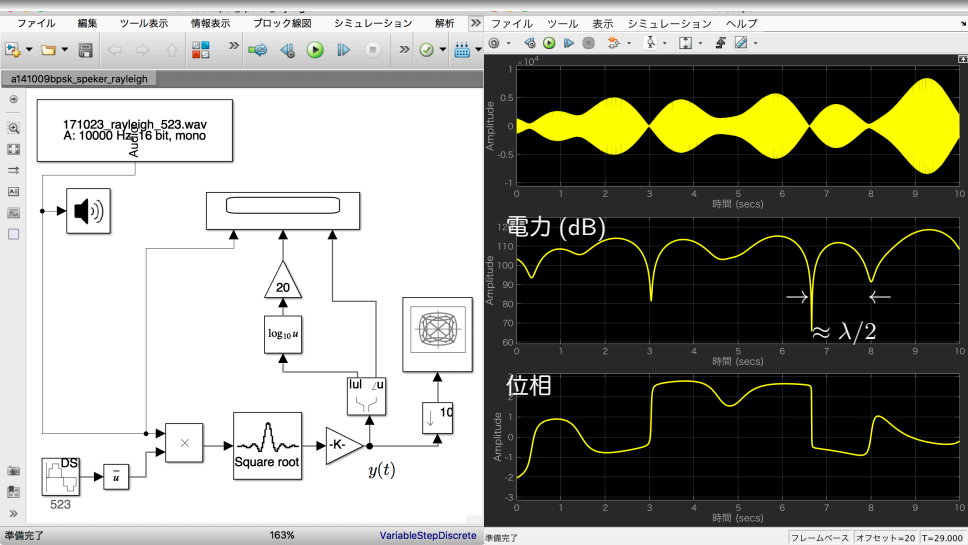


ベースバンド信号は複素平面上で表現される (コンスタレーション)

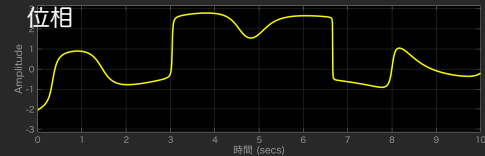
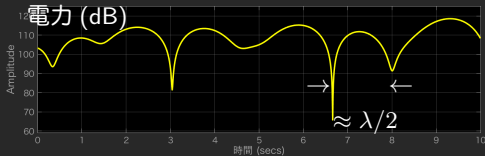
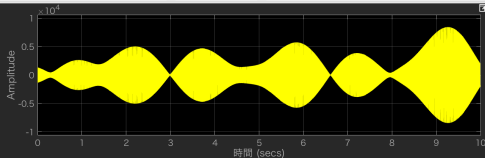
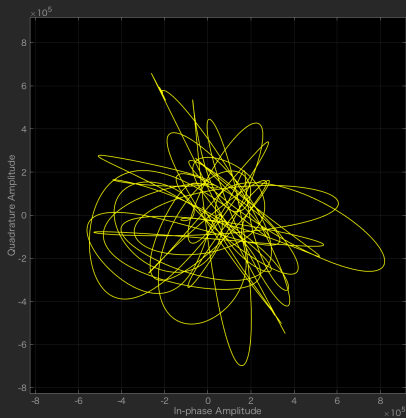




受信すると、マルチパスフェージング g や雑音 n などにより歪む

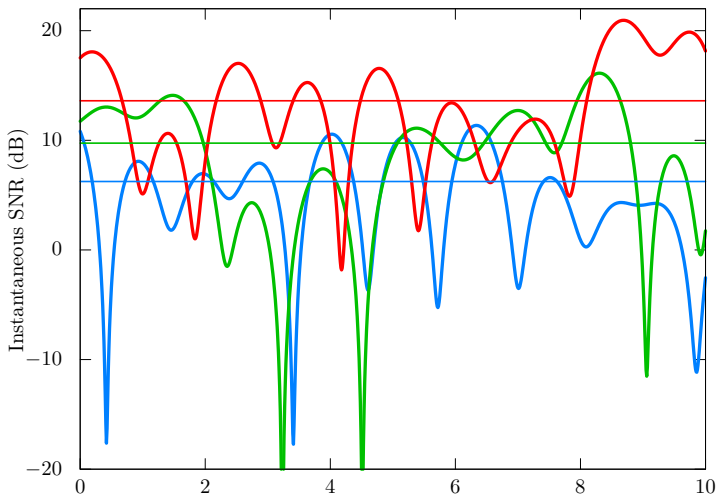


523 Hz の搬送波 (無変調波) がレイリーフェージングを受けた場合



g : 円対称複素ガウス分布, $|g|^2$: レイリー分布, $|g|$: 指数分布

レイリーフェージングチャネルにおける瞬時受信電力/SNR



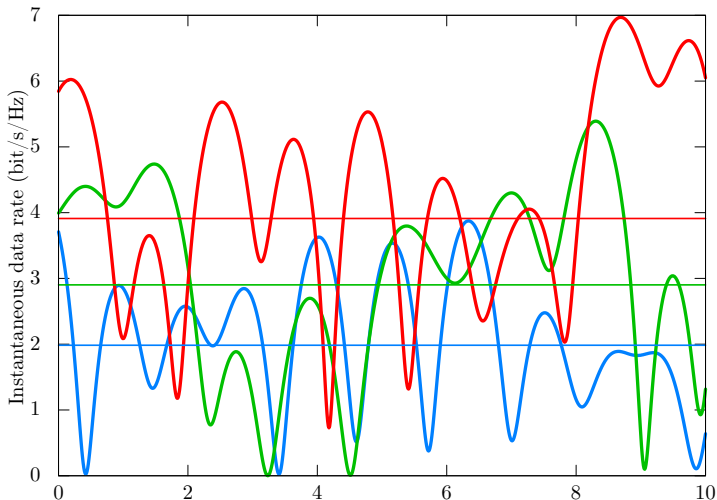
▶ 赤：セル中央, 青：セル端

▶ 瞬時 SNR \overline{SNR}

▶ 平均 SNR \overline{SNR}

算術平均 (説明の簡単のため、この図範囲以外を含む長区間での平均)

レイリーフェージングチャネルにおける瞬時伝送速度



- ▶ 瞬時伝送速度 $\log_2(1 + SNR)$ bit/s/Hz
- ▶ 平均伝送速度 $\overline{\log_2(1 + SNR)}$ bit/s/Hz
- ▶ どのタイミングでどのユーザに割り当てるとよいか？

- ▶ LTE だと、0.5 ms がリソース割当の最小単位 (リソースブロック)
- ▶ 無線 LAN IEEE 802.11a だと、OFDM シンボルは $4 \mu\text{s}$, イーサネットフレームの最大データ長 1500 B をフレーム長の大きくなる低伝送速度の 6 Mbit/s だと 2 ms 強

	時速	秒速	0.5 ms あたり移動距離
歩行	5 km/h	1.4 m/s	0.7 mm
車	50 km/h	14 m/s	7 mm
リニア	500 km/h	140 m/s	7 cm

レイリーフェージングの谷から谷が半波長オーダー

1 GHz であれば、波長は 30 cm

波長のオーダーに対してリソース制御のオーダーが十分に小さければ、フェージング瞬時値に追従してリソース割当可能

洗濯，朝食，娘の小学校・学童送迎，夕食，習い事送迎，掃除，風呂，寝かしつけ，PTA，保護者会，地域役員，病院対応，買い出し，各種支払い，手続き...

出張も多いし，この歳になるとお互いの親も...

シューマン，アンダーソン，『夫婦仲の経済学』に出てくる例

作業	ナンシー	エリック
皿洗い	20 min	30 min
片付け	10 min	60 min

どのように分担するとよいか？ 週に6日間やることにする

得意な方が行くと，不公平な結果に
max SNR scheduling

作業	ナンシー	エリック
皿洗い/週 6 日	120 min	0 min
片付け/週 6 日	60 min	0 min
合計	180 min	0 min

二人とも同じ作業を交互に行うのは
公平だが，効率が低い
Round-robin scheduling

作業	ナンシー	エリック
皿洗い/週 3 日	60 min	90 min
片付け/週 3 日	30 min	180 min
合計	90 min	270 min

比較優位 (comparative advantage)
による分業
(実世界にはいろんな仕事があるから)
どんな人でも役に立つことができる
Proportional fair scheduling

作業	ナンシー	エリック
皿洗い/週 6 日	0 min	180 min
片付け/週 6 日	60 min	0 min
合計	60 min	180 min

Max SNR scheduling

瞬時 SNR (瞬時伝送速度) が最大のユーザにリソース (通信権) を割り当てる

Pros.

- ▶ ネットワーク全体のスループットの和が最大

Cons.

- ▶ SNR の低いユーザはなかなか通信できない

Round-robin scheduling

すべてのユーザに順番にリソースを割り当てる

Pros.

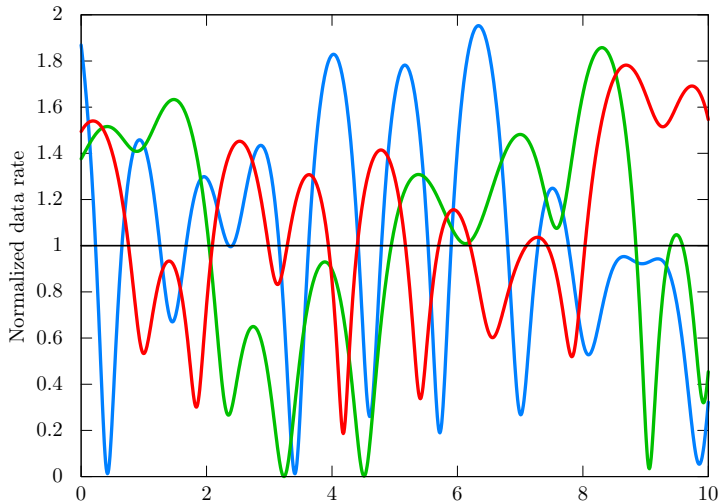
- ▶ 機会の公平性

Cons.

- ▶ 通信品質が低い (最悪通信が成立しない) タイミングでもリソースが割り当てられてしまう

PF scheduling

- ▶ 送信機会は公平に訪れる
- ▶ 瞬時伝送速度に時間変動がなければ, Round Robin と同じ (はず)
- ▶ 全ユーザの移動平均スループットの積を最大化することが証明される (移動平均のパラメータによる)
- ▶ 3G 以降のパケットデータ伝送の標準方式



結果から述べると、
瞬時伝送速度を平均伝送速度で正規化した値が最大のユーザに割り当てる
Proportional fair scheduling (PFS) と呼ぶ

シャノンの通信路容量

$$\underbrace{W}_{(1)} \log_2(1 + \underbrace{SNR}_{(2)}) \text{ bit/s } \underbrace{(/\text{channel})}_{(3)}$$

(1) 帯域幅 W を拡大

シンボルレート増大
マルチキャリア伝送
ミリ波
周波数共用
→リソース制御必要

(2) SNR を増大

適応変調・多値変調
高利得アンテナ
ビームフォーミング
伝搬損の小さいチャンネル
中継による不感地帯対策

(3) 通信路の数を増大

MIMO 通信路
(Massive MIMO)
稠密基地局設置 densification
空間的周波数再利用
→リソース制御必要

干渉存在時の通信路容量の総和の最大化 sum rate maximization problem

$$\begin{aligned} & \max_{(p_i)_{i \in \mathcal{N}}} \sum_{i \in \mathcal{N}} \ln[1 + \text{SINR}_i((p_i)_{i \in \mathcal{N}})] \text{ nat/s/Hz} \\ & = \max_{(p_i)_{i \in \mathcal{N}}} \sum_{i \in \mathcal{N}} \ln \left(1 + \frac{G_{ii} p_i}{\sigma_i^2 + \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} G_{ij} p_j} \right) \text{ nat/s/Hz} \end{aligned}$$

- ▶ 最適送信電力設定の目的関数は非凸関数 (ヘッセ行列が正定値でない)
最適チャネル割当は NP 困難 [Raniwala et al., 2004, Hayashi and Luo, 2009]
- ▶ 基本的な無線リソース設定問題ですら NP 困難
→ 無線リソース制御はヒューリスティックが一般的

各論的議論を避け、できる限り一般的議論を行うため

- ▶ 送信地点のランダム性に起因する干渉の確率分布には確率幾何解析
- ▶ 干渉を相互作用と捉えればゲーム理論

が有用 (山本の意見)

山本高至, “ゲーム理論の無線通信への応用,” 電子情報通信学会誌, Dec. 2012.

K. Yamamoto, “A comprehensive survey of potential game approaches to wireless networks,” IEICE Trans. Commun., Sept. 2015.

- ▶ 確率幾何解析以前はどのような評価がされてきたか？
- ▶ モンテカルロ法 (シミュレーション) と確率幾何解析の関係とは？
- ▶ よく仮定されるポアソン点過程 (PPP) とは何か？ 一般的な仮定との関係は？
- ▶ Campbell の定理, pgfl for PPP がなぜ必要か？ どういう条件で使えるか？
- ▶ ラプラス変換がなぜ出てくるのか？ いつでも使えるのか？
- ▶ ICC 2016 で 960 件中 80 件を超える論文が確率幾何解析を用いている理由は何か？
- ▶ [Andrews et al., 2011] の引用件数が 1000 件を超える理由は何か？

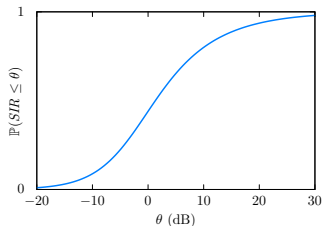
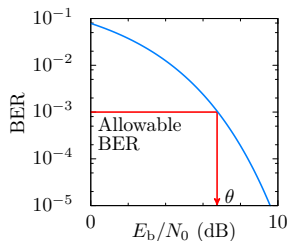
基本さえ分かっていたら応用も理解できると思うので、本スライドは [Andrews et al., 2011] の基礎だけは理解して頂くことを目的としています

応用に関してはサーベイ論文 [ElSawy et al., 2013, ElSawy et al., 2017]

[三瓶 2002, pp. 373–374]

- BER- E_b/N_0 特性を計算機シミュレーションや理論解析により求める
(変復調, 符号, フェージング補償法, フェージングなどに依存)
- 許容 BER を満たす E_b/N_0 より SIR の閾値 θ を求める
- SIR の cdf をパラメータ (セル繰り返し数など) 毎に求める
劣化率 $\mathbb{P}(SIR \leq \theta)$ が許容値 (例えば 10%) を満足するパラメータを求める
パラメータ L の際の SIR を $SIR(L)$ と表すと, 次式を満たす L を見つける問題

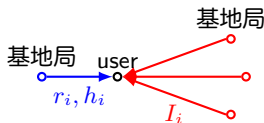
$$\mathbb{P}(SIR(L) \leq \theta) \leq 0.1$$



▶ SIR の cdf の求め方？

i 番目の繰り返しにおいて、以下の実現値を定める

- ▶ 基地局との距離の実現値 r_i
- ▶ 所望信号のフェージング・シャドウイングの電力利得の実現値 h_i
- ▶ 干渉電力の実現値 I_i



SIR の実現値 $SIR(r_i, h_i, I_i)$ を求める

SIR の経験 cdf を求める

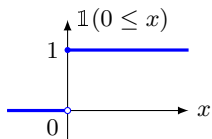
$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}(SIR(r_i, h_i, I_i) \leq \theta) \xrightarrow{\text{a.s. } M \rightarrow \infty} \mathbb{P}(SIR \leq \theta) = F_{SIR}(\theta)$$

▶ 経験 cdf の定義と、cdf に概収束する根拠

実現値 realization: X が $[0, 1]$ の一様分布なら、実現値例は $x_1 = 0.2429, x_2 = 0.3271, \dots$

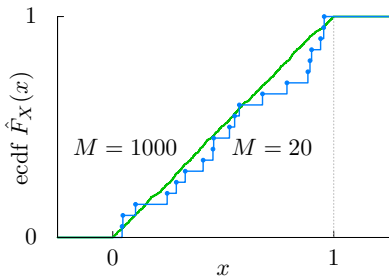
M 個の実現値 $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ に対する経験 cdf

$$\hat{F}_X(x) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}(x_i \leq x)$$



$\{x_1, \dots, x_M\}$ を昇順に並べ直した $\{x'_1, \dots, x'_M\}$ に対して
 $\{(1/M, x'_1), \dots, (i/M, x'_i), \dots, (M/M, x'_M)\}$ を階段状に結んだもの

例：一様分布 $x_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$



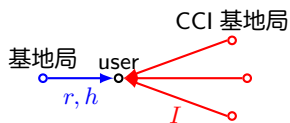
大数の法則により各点 $x \in \mathbb{R}$ で cdf $F_X(x)$ に概収束

$$\hat{F}_X(x) \xrightarrow{\text{a.s. } M \rightarrow \infty} F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

▶ なぜ cdf を直接求めないのか？

$\mathbb{1}(x)$: 指示関数, indicator function, which is one when x is true and is zero otherwise

SIR の cdf を解析的に求めようとするのは困難とされていた



確率変数 SIR は r, h, I に依存

- ▶ 基地局との距離 r の pdf を $f_r(r)$
- ▶ 所望信号のフェージング・シャドウイングの電力利得 h の pdf を $f_h(h)$
- ▶ 干渉電力 I の pdf を $f_I(I)$
- ▶ 基地局の送信電力を P_b

とすると

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(SIR \leq \theta) &= \mathbb{E}_{SIR}[\mathbb{1}(SIR \leq \theta)] = \mathbb{E}_{r,h,I}[\mathbb{1}(SIR \leq \theta)] \\ &= \iiint \mathbb{1}\left(\frac{hr^{-\alpha}P_b}{I} \leq \theta\right) f_{r,h,I}(r, h, I) dr dh dI \\ &\stackrel{(a)}{=} \iiint \mathbb{1}\left(\frac{hr^{-\alpha}P_b}{I} \leq \theta\right) f_r(r) f_h(h) f_I(I) dr dh dI\end{aligned}$$

ではある ((a) r, h, I が独立であれば)

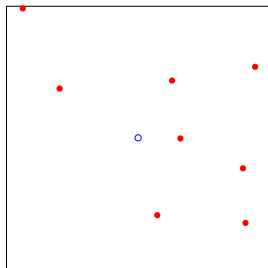
ただ、そもそも各 pdf が解析的に得られるか不明だし、得られたところで数値積分に頼らざるを得ないことが多い

それなら **モンテカルロシミュレーション** で ecdf を求めてしまえばいいような...

“The Monte Carlo method has been used for **the simulation of random processes** and is based upon the principle of taking samples of random variables from their defined probability density functions. The method may be described as the most powerful and commonly used technique for analysing complex statistical problems. **The Monte Carlo approach does not have an alternative** in the development of a methodology **for analysing unwanted emission interference.**”

例 1

TX: HPPP, RX: 1 点



フェージングなし

期待値 $\mathbb{E}[I(\varphi_i)]$

新しく導入する事柄

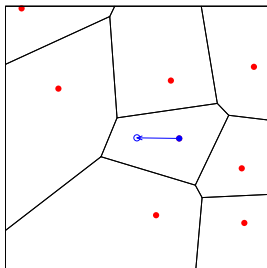
▶ HPPP

Campbell's theorem

文献 [Haenggi 2012, §5.1]

例 2 (セルラ)

Poisson-Voronoi cell
Nearest BS association



レイリーフェージング

ccdf $\mathbb{P}(SIR > \theta)$

Laplace transform

pgfl for HPPP

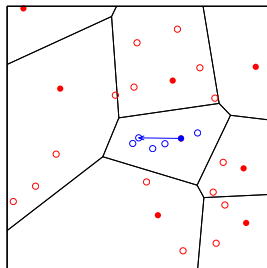
Slivnyak's theorem

[Andrews 2011]

[Haenggi 2012, §13.4.2]

例 3

Two independent PPPs



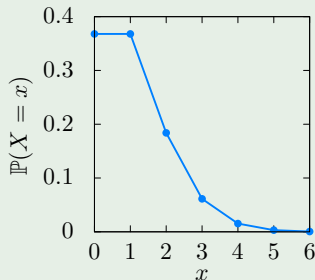
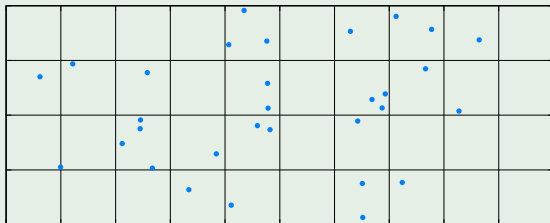
レイリーフェージング

ccdf $\mathbb{P}(SIR > \theta)$

[Yu 2013]

独立な点の密度 (強度) が λ の時
領域 B に含まれる点の数が従う分布は期待値 $\lambda|B|$ のポアソン分布
点自体の分布をポアソン点過程と呼ぶ

$\lambda = 1, |B| = 1$



期待値 1 のポアソン分布の pmf $\mathbb{P}(X = x)$

一般論

1. 領域 B に対して, 期待値 $\lambda|B|$ のポアソン確率変数の実現値 n を定める
R であれば `rpois(10,lambda=100)` とすると期待値 100 の, 10 個のポアソン乱数列が出力される
117 86 93 102 101 96 85 88 94 113
2. 領域 B の中に n 個の点を一様に置く



spatstat パッケージ [Baddeley et al., 2015] を使う. 前ページの図は
`P <- rpoispp(lambda=1, win=owin(xrange=c(0,10), yrange=c(0,4)))`
`plot(P)`

領域 B に対して Φ が強度 λ の PPP の場合

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = n) = \frac{e^{-\lambda|B|}(\lambda|B|)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$\Phi(B)$: 領域 B 内の点過程 Φ の点の数を表す確率変数

ここからすぐに計算できること

点の数の期待値 $\mathbb{E}_{\Phi}[\Phi(B)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}(\Phi(B) = n) = \lambda|B|$

点がない確率 $\mathbb{P}(\Phi(B) = 0) = e^{-\lambda|B|}$

少なくとも 1 つ点がある確率 $\mathbb{P}(\Phi(B) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda|B|}$

Φ が強度 λ の HPPP であれば $\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = e^{-\lambda|B|} \frac{(\lambda|B|)^k}{k!}$

第 n 近傍距離の cdf, pdf

$$\begin{aligned} F^{(n)}(r) &:= 1 - \mathbb{P}(\Phi(b(o, r)) < n) \\ &= 1 - e^{-\lambda\pi r^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda\pi r^2)^k}{k!} \\ f^{(n)}(r) &:= \frac{dF^{(n)}(r)}{dr} = \frac{2(\lambda\pi)^n r^{2n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda\pi r^2} \end{aligned}$$

$b(o, r)$ は中心 o , 半径 r の円. $|b(o, r)| = \pi r^2$

最近傍距離の pdf

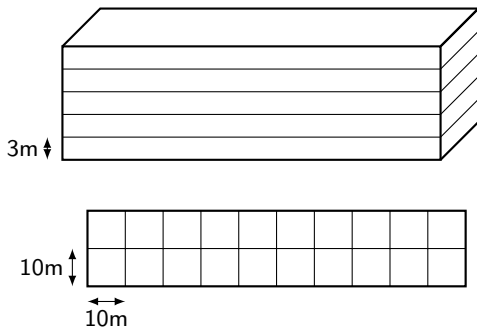
$$f^{(1)}(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2} \quad (2)$$

▶ 点過程なんて一般に使われる？

無線 LAN でも無線局の位置のランダム性に配慮した評価が行われる

TGax Simulation Scenarios, IEEE 802.11-14/0980r16

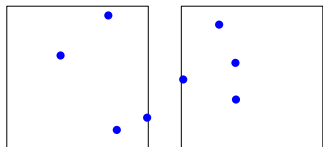
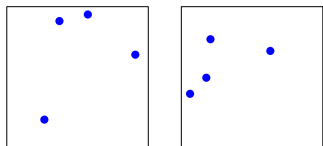
Residential Scenario: “In each apartment, place AP and STA in random xy-locations (uniform distribution)”



▶ 点過程とどう関係がある？

シミュレーションでよくある仮定は、二項点過程と呼ぶべきもの

二項点過程 (BPP: binomial point process)

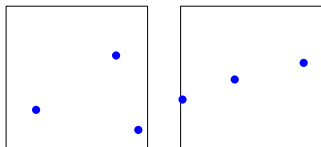
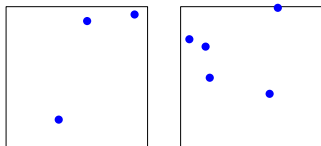


2 パラメータ (エリア・点の数)

シミュレーションでよく仮定

あるエリアの中に、ある数の送信点を
一様ランダムに配置

ポアソン点過程 (PPP)



1 パラメータ (点の密度 λ)

確率幾何解析でよく仮定
最近ではシミュレーションでも見かける

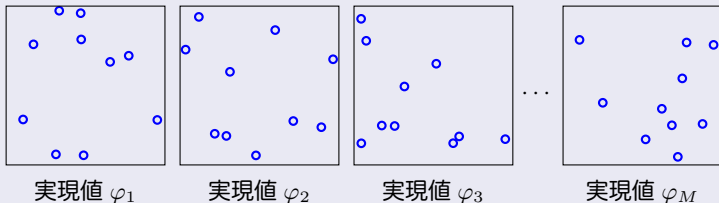
PPP は後述の Campbell's theorem や
pgfl が知られており、解析的に扱いやすい

- ▶ Cluster point process: (attractive)
- ▶ Matérn hard-core point process type II: (repulsive) CSMA のモデルとして使われる
- ▶ Ginibre point process: (repulsive) 東工大 三好先生がセルラに先駆的に応用

▶ シミュレーションは、数学的に何をやっていると捉えられるか？

点のランダム性に関するモンテカルロシミュレーションの数学的表現

- ▶ 点 (送信局など) のランダムな座標の集合 (= 確率点過程) $\Phi = \{x_i\}$ の実現値 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$ を生成



- ▶ 各実現値 φ_i に対し, 何らかの特性 $f(\varphi_i)$ を計算

例 1 : 原点 o における干渉電力 (フェージングなし)

$$f(\varphi_i) = I(\varphi_i) := \sum_{x \in \varphi_i} \|x - o\|^{-\alpha}, \quad \alpha: \text{伝搬係数}$$

- ▶ 経験期待値 $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(\varphi_i)$ や経験 cdf $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}(f(\varphi_i) \leq x)$ を結果とする

▶ 求めようとしたものと一致しているのか?

経験期待値 sample/empirical mean/average/expectation

例 1 で求めようとしていたもの

$$\mathbb{E}_I[I] = \mathbb{E}_\Phi[I(\Phi)] = \int_{\mathcal{N}} I(\varphi) \mathbb{P}(d\varphi) \quad (3)$$

- ▶ I は確率変数. その source of randomness (の一つ) が, 点の座標のランダム性
- ▶ \mathbb{E}_Φ をどうやって無くすかが重要. できれば閉形式を求めたい. これが残っていると, mathematical expression と呼べない

(3) の意味を説明しだすときりが無いので, 確率変数の期待値の次の表現との関連だけ指摘

$$\mathbb{E}_X[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上の確率変数
細かい説明は [Haenggi2012, §2.5.4]

(3) を求めるための 2 つのアプローチ

1. モンテカルロ法

$\int_{\mathcal{N}} I(\varphi) \mathbb{P}(d\varphi)$ を $\sum_{i=1}^M I(\varphi_i) \frac{1}{M}$ に置き換える

2. 確率幾何解析

1. モンテカルロ法

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I(\varphi_i) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}_I[I]?$$

たくさん φ_i を生成して、特性 $I(\varphi_i)$ を求めて、平均化しさえすればよい
(大数の法則が成り立てば)

Pros.

- ▶ だいたいどんな関数 $I(\cdot)$ でも可
($I(\varphi_i) = \sum_{x \in \varphi_i} \|x\|^{-\alpha}$ は大数の法則が成り立たない例)

Cons.

- ▶ 1桁の精度向上に、2桁の M 増加必要
 10^4 回に一度しか起こらない場合、 $M = 10^6$ は必要
- ▶ 結果の妥当性検証
プログラムミス
データ捏造

2. 確率幾何

$$\mathbb{E}_I[I] = \mathbb{E}_{\Phi} \left[\sum_{x \in \Phi} \|x\|^{-\alpha} \right]$$

▶ Campbell's theorem for HPPP

$$\mathbb{E}_{\Phi} \left[\sum_{x \in \Phi} f(x) \right] = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx$$

$$\mathbb{E}_I[I] = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \|x\|^{-\alpha} dx$$

数式表現ができた。ここから式変形を進められる [Haenggi, 2012, §5.1]

ただし、この場合、積分の値は発散

和の期待値・積の期待値の計算方法 (証明等は文献参照)

Let Φ be a HPPP on \mathbb{R}^d with intensity λ , and $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ and $v : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ be measurable functions. Then,

和 : Campbell's theorem for sums [Haenggi, 2012, §4.2]

$$\mathbb{E}_{\Phi} \left[\sum_{x \in \Phi} f(x) \right] = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

点過程の和の期待値は, 積分に変換可能

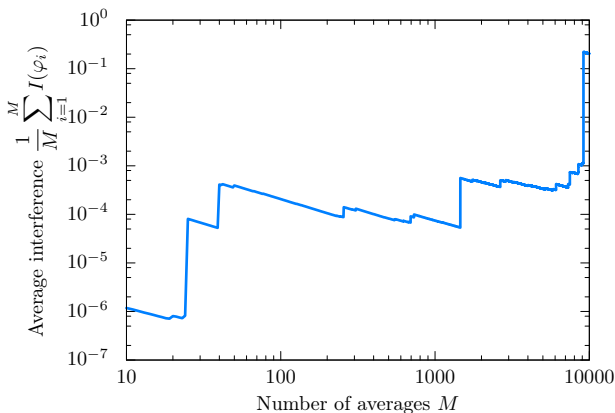
積 : Probability generating functional (pgfl) for PPP [Haenggi, 2012, §4.6]

$$\mathbb{E}_{\Phi} \left[\prod_{x \in \Phi} v(x) \right] = \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (1 - v(x)) dx \right)$$

点過程の積の期待値は, 積分に変換可能

- ▶ PPP だとこれらの性質が使える (ので, PPP がよく仮定される)
- ▶ そのままの意図は \mathbb{E}_{Φ} をなくすこと. 残っていると, mathematical expression でさえない. 可能なら閉形式などにしたい

モンテカルロ法の結果例 (病的な例)

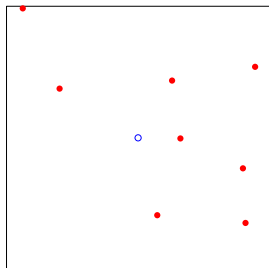


$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I(\varphi_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{x \in \varphi_i} \|x\|^{-4}$$

M を大きくしていても、収束しない (大数の法則が成り立たない)
受信点との距離が限りなく 0 に近いと、干渉電力が無限大になるため

例 1

TX: HPPP, RX: 1 点



フェージングなし

期待値 $\mathbb{E}[I(\varphi_i)]$

新しく導入する事柄

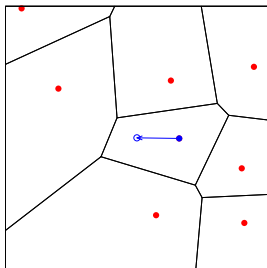
▶ HPPP

Campbell's theorem

文献 [Haenggi 2012, §5.1]

例 2 (セルラ)

Poisson-Voronoi cell
Nearest BS association



レイリーフェージング

ccdf $\mathbb{P}(SIR > \theta)$

Laplace transform

pgfl for HPPP

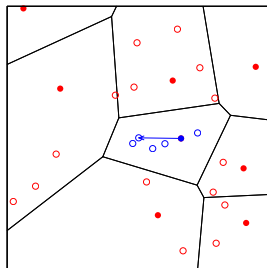
Slivnyak's theorem

[Andrews 2011]

[Haenggi 2012, §13.4.2]

例 3

Two independent PPPs



レイリーフェージング

ccdf $\mathbb{P}(SIR > \theta)$

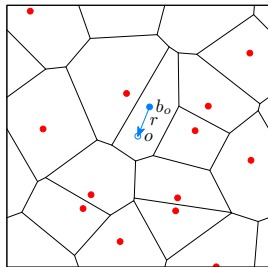
[Yu 2013]

例 2: セラシステム下りリンク — システムモデル

- ▶ 基地局は HPPP Φ_b with intensity λ_b
- ▶ ユーザの位置はどこでもいため、原点 o としても一般性を失わない
- ▶ 原点 o のユーザと、最近傍基地局 $b_o = \arg \min_{x \in \Phi_b} \|x - o\|$ 間の距離を、確率変数 r と表すと式 (2) より $f_r(r) = 2\pi\lambda_b r e^{-\pi\lambda_b r^2}$
- ▶ 基地局の送信電力 P_b
- ▶ 雑音電力は 0. [Andrews 2011] には 0 でない場合もある
- ▶ 所望波および地点 x からの干渉波のレイリーフェージング電力利得 (送信電力込) $h, h_x \sim \text{Exp}(1/P_b)$
[Andrews 2011] には指数分布以外の場合も [▶ 復習](#)
- ▶ 干渉源は最近傍基地局 b_o (距離 r) より遠くの基地局 $\Phi_b \setminus \{b_o\} = \Phi_b \setminus b(o, r)$
 $b(o, r)$: 半径 $r := \|b_o\|$ の円内領域

$$I_r := \sum_{x \in \Phi_b \setminus \{b_o\}} h_x \|x\|^{-\alpha} = \sum_{x \in \Phi_b \setminus b(o, r)} h_x \|x\|^{-\alpha}$$

$\Phi_b \setminus b(o, r)$ は強度関数 $\lambda(x) = \lambda_b \mathbb{1}(\|x\| > r)$ の (inhomogeneous) PPP



赤点が $\Phi_b \setminus \{b_o\}$

期待値が $1/\lambda$ の確率変数 X (i.e., $\mathbb{E}_X[X] = 1/\lambda$) が指数分布に従うことを次式で表す

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

X の cdf $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{E}_X[\mathbb{1}(X \leq x)]$ を次式としたことと同じ

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (x \geq 0)$$

X の ccdf $\bar{F}_X(x) := 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{E}_X[\mathbb{1}(X > x)]$ は

$$\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x}, \quad (x \geq 0)$$

$x \sim \text{Exp}(\lambda)$, $F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ と書く流儀あり

本スライドでも両方の流儀を断り無しに混在

青色表記はよく省略される箇所

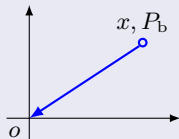
cdf: 累積分布関数, cumulative distribution function

ccdf: 相補累積分布関数, complementary cumulative distribution function

i.i.d. block Rayleigh fading with an exponential-decaying path loss model

受信点を原点 o とする座標系で、送信点座標が $x \in \mathbb{R}^2$
送信電力 P_b の際に、瞬時受信電力を次式とするモデル

$$h_x \|x - o\|^{-\alpha} = h_x \|x\|^{-\alpha}, \quad h_x \sim \text{Exp}(1/P_b), \quad \text{i.e., } \mathbb{E}_{h_x}[h_x] = P_b$$



- ▶ h_x : o と x の間のフェージング電力利得と送信電力の積
- ▶ P_b は、基本的には送信電力だが、送受信アンテナ利得や、 $\|x\| = 1$ の際の伝搬損などが織り込まれた値と捉えるとよい
- ▶ ブロック (準静的) は、フレーム送信に必要な時間がコヒーレント時間より短い、i.e., h_x が一定と仮定

- ▶ h_x と $x \in \mathbb{R}^2$ が確率変数

i.i.d.: independent and identically distributed. 独立同分布 (あるいは独立同一分布)

$\|\cdot\|$: Euclidean distance. ユークリッド距離

$\|x\|$ が小さいと遠方界にならないなどの理由で、 $\|x\|^{-\alpha}$ の代わりに $\min\{1, \|x\|^{-\alpha}\}$ とするモデルもある

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(SIR > \theta) &= \mathbb{E}_r[\mathbb{P}(SIR > \theta | r)] = \int_0^\infty \mathbb{P}(SIR > \theta | r) f_r(r) dr \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int_0^\infty \mathcal{L}_{I_r}(\theta r^\alpha / P_b | r) f_r(r) dr \\
 &\stackrel{(c)}{=} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{2\pi\lambda_b r^2 \theta}{\alpha - 2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)\right] \cdot 2\pi\lambda_b r e^{-\pi\lambda_b r^2} dr \\
 &= 2\pi\lambda_b \int_0^\infty \exp\left\{-\pi\lambda_b r^2 \left[1 + \frac{2\theta}{\alpha - 2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)\right]\right\} dr \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{2\theta}{\alpha - 2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)} \\
 &= \frac{1}{1 + \sqrt{\theta} \arctan \sqrt{\theta}} \quad (\alpha = 4)
 \end{aligned} \tag{4}$$

(b), (c) 次頁以降参照

(4) BS の密度 λ_b に依存しない. 劣化率は干渉制限ならセルサイズに依存しないという定性的に知られていることを式で示している

$\mathbb{P}(SIR > \theta)$: Coverage probability, success probability, 場所率. SIR の ccdf

$\mathbb{P}(SIR \leq \theta)$: Outage probability, 劣化率. SIR の cdf

(b)

$$\mathbb{P}(SIR > \theta | r) = \mathbb{P}\left(\frac{hr^{-\alpha}}{I_r} > \theta \mid r\right)$$

$$= \mathbb{P}(h > \theta r^\alpha I_r | r)$$

$$= \mathbb{E}_{I_r}[\mathbb{P}(h > \theta r^\alpha I_r | r, I_r)]$$

$$= \mathbb{E}_{I_r}[e^{-\theta r^\alpha I_r / P_b} | r]$$

$$= \mathcal{L}_{I_r}(\theta r^\alpha / P_b | r)$$

$$= \text{▶ (c) } \mathcal{L}_{I_r}(s) \text{ の計算方法}$$

$$= \exp\left[-\frac{2\pi\lambda_b r^2 \theta}{\alpha - 2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)\right]$$

確率変数 h と I_r を分けて計算したい

条件付き確率. 確率変数は h だけ

$h \sim \text{Exp}(1/P_b)$, i.e., $\mathbb{P}(h > x) = e^{-x/P_b}$

確率変数 I_r の pdf のラプラス変換の定義は

$$\mathcal{L}_{I_r}(s) = \mathbb{E}_{I_r}[e^{-sI_r}] = \int_{\mathbb{R}} f_{I_r}(z) e^{-sz} dz$$

ここから分かること

- ▶ 所望信号電力が指数分布に従う (レイリーフェージング) 場合にのみ, 「SIR の ccdf $\mathbb{P}(SIR > \theta | r)$ 」が「干渉 I_r の pdf のラプラス変換 $\mathcal{L}_{I_r}(s | r)$ 」になる
- ▶ 所望信号が指数分布に従わなければ積分が残る. tractability のために指数分布を仮定することが多い [Andrews 2011]

(c) $\mathcal{L}_{I_r}(s | r)$ の求め方

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{I_r}(s | r) &= \mathbb{E}_{I_r}[e^{-sI_r}] = \mathbb{E}_{\Phi_b, \{h_x\}} \left[\exp \left(-s \sum_{x \in \Phi_b \setminus \{b_o\}} h_x \|x\|^{-\alpha} \right) \right] \\ &\stackrel{(d)}{=} \mathbb{E}_{\Phi_b} \left\{ \prod_{x \in \Phi_b \setminus b(o,r)} \mathbb{E}_h [\exp(-sh\|x\|^{-\alpha})] \right\} = \mathbb{E}_{\Phi_b} \left[\prod_{x \in \Phi_b \setminus b(o,r)} \frac{\|x\|^\alpha}{\|x\|^\alpha + sP_b} \right] \\ &\stackrel{\text{pgfl}(e)}{=} \exp \left(-\lambda_b \int_{\mathbb{R}^2 \setminus b(o,r)} \frac{sP_b}{\|x\|^\alpha + sP_b} dx \right) = \exp \left(-\lambda_b \int_0^{2\pi} \int_r^\infty \frac{sP_b}{v^\alpha + sP_b} v dv d\theta \right) \\ &= \exp \left(-2\pi\lambda_b \int_r^\infty \frac{sP_b}{v^\alpha + sP_b} v dv \right)\end{aligned}$$

(d): h_x は i.i.d.

(e): Φ が定常 (強度 λ) でなく, 強度が位置 x に依存 (強度関数 $\lambda(x)$) する場合の pgfl

$$\mathbb{E}_\Phi \left[\prod_{x \in \Phi} v(x) \right] = \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} (1 - v(x)) \lambda(x) dx \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_r}(s | r) &= \exp\left(-2\pi\lambda_b \int_r^\infty \frac{sP_b}{v^\alpha + sP_b} v \, dv\right) \\ &\stackrel{(f)}{=} \exp\left[-\frac{2\pi\lambda_b sP_b r^{2-\alpha}}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\frac{sP_b}{r^\alpha}\right)\right] \end{aligned}$$

(f): [Gradshteyn and Ryzhik, 2014, (9.111)] より求められる以下の関係

$$\int_x^\infty \frac{t}{1+t^\alpha} dt = \frac{x^{2-\alpha}}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -x^{-\alpha}\right)$$

ここで, ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ はガウスの超幾何関数 Gauss hypergeometric function

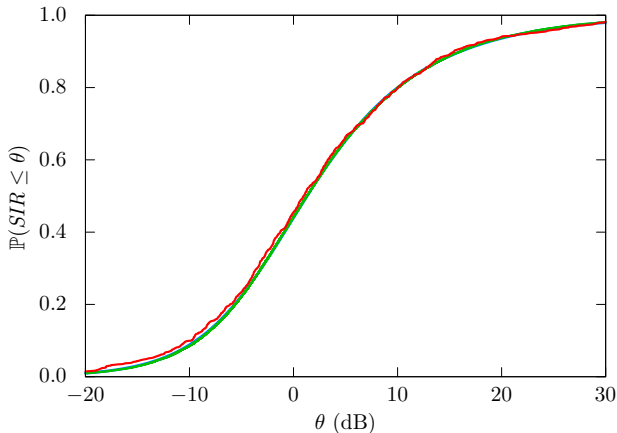
$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n$$

$(\alpha)_n$ はポツホハマー記号 Pochhammer symbol

$$(\alpha)_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1), & n = 1, 2, \dots \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

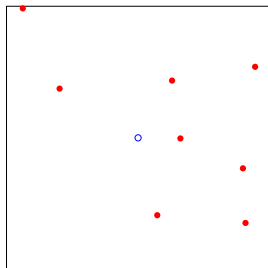
- ▶ 1,000 回のモンテカルロ法の ecdf (赤)
- ▶ 40,000 回のモンテカルロ法の ecdf (緑)
- ▶ 解析による cdf $\mathbb{P}(SIR \leq \theta) = 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\theta} \arctan \sqrt{\theta}}$ (青)

$\alpha = 4$. cdf と 40,000 回の ecdf はほぼ一致



例 1

TX: HPPP, RX: 1 点



フェージングなし

期待値 $\mathbb{E}[I(\varphi_i)]$

新しく導入する事柄

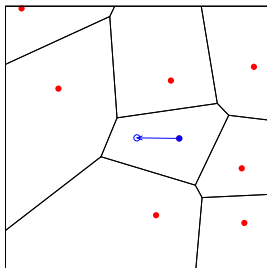
▶ HPPP

Campbell's theorem

文献 [Haenggi 2012, §5.1]

例 2 (セルラ)

Poisson-Voronoi cell
Nearest BS association



レイリーフェージング

ccdf $\mathbb{P}(SIR > \theta)$

Laplace transform

pgfl for HPPP

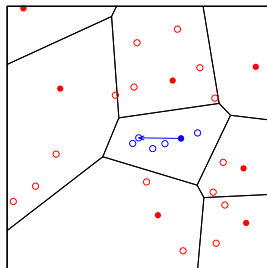
Slivnyak's theorem

[Andrews 2011]

[Haenggi 2012, §13.4.2]

例 3

Two independent PPPs



レイリーフェージング

ccdf $\mathbb{P}(SIR > \theta)$

[Yu 2013]

Comparison with previous studies

	Interference	Scheduling
Stochastic geometry analysis of a cellular network, e.g., [Andrews 2011]	o	Random (Round-Robin)
Analysis of channel-adaptive scheduling, e.g., [Yang 2006]	x (single-cell)	Channel-adaptive
Present study	o	Channel-adaptive

Approach of the present study

- ▶ cdf of SIR (coverage probability) and average ergodic rate of **normalized SNR scheduling** are derived.
- ▶ cdf of SIR is well approximated by a closed-form expression even when **normalized SNR scheduling** is used.

[Andrews 2011] J. G. Andrews, F. Baccelli, and R. K. Ganti, "A tractable approach to coverage and rate in cellular networks," *IEEE Trans. Commun.*, 2011.

[Yang 2006] L. Yang and M.-S. Alouini, "Performance analysis of multiuser selection diversity," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2006.

Theorem 1 ([Andrews 2011])

ccdf of SIR under Rayleigh fading channel in cellular networks

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) = \frac{1}{1 + \frac{2\theta}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)}$$

α : path loss exponent

Channel adaptive scheduling is not considered.

Proposition 1 (Normalized SNR scheduling)

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+c+1)(\lambda_u/c\lambda_b)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(c+1)(\lambda_u/c\lambda_b+1)^{n+c+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{1 + \frac{2k\theta}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -k\theta\right)}$$

λ_b : intensity of BSs, λ_u : intensity of users

Theorem 2 ([Andrews 2011])

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) = \frac{1}{1 + \sqrt{\theta} \arctan \sqrt{\theta}}$$

Proposition 2 (Normalized SNR scheduling)

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k\theta} \arctan \sqrt{k\theta}},$$

$$f_N(n) = \frac{\Gamma(n+c+1)(\lambda_u/c\lambda_b)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(c+1)(\lambda_u/c\lambda_b+1)^{n+c+1}}, \quad c = 3.5$$

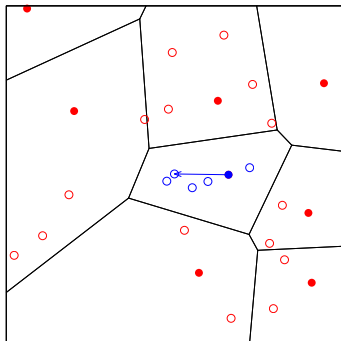
Proposition 3

When λ_u/λ_b is an integer, we approximate $f_N(\lambda_u/\lambda_b) \simeq 1$ and $f_N(n) \simeq 0$ for $n \neq \lambda_u/\lambda_b$,

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{k=1}^{\lambda_u/\lambda_b+1} \frac{\binom{\lambda_u/\lambda_b+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k\theta} \arctan \sqrt{k\theta}}.$$

Downlink cellular network consists of BSs and users (same as in [Yu 2013])

- ▶ BSs: PPP Φ_b with intensity λ_b
- ▶ Users: PPP Φ_u with intensity λ_u
- ▶ Each user is associated with the nearest BS (Voronoi cell)



Normalized SNR scheduler

A user with the largest instantaneous SNR normalized by the short-term average SNR,

$$\arg \max_i \frac{SNR_i}{\mathbb{E}[SNR_i]} = \arg \max_i h_i,$$

where h_i represents the fading gain with unit mean, i.e., $h_i \sim \exp(1)$.

PF scheduler

$$\arg \max_i \frac{rate_i}{\mathbb{E}[rate_i]}$$

If $rate_i \propto SNR_i$, normalized SNR scheduler is equivalent to PF scheduler.

The **order statistics** obtained by arranging the values of $n + 1$ h_i 's in increasing order of magnitude are

$$h_{1:n+1} < h_{2:n+1} < \cdots < h_{n+1:n+1}$$

When the cdf of h_i is $F_{h_i}(x) = 1 - e^{-x}$ (Rayleigh fading with unit mean), the cdf of $h_{n+1:n+1}$ is

$$F_{h_{n+1:n+1}}(x) = (1 - e^{-x})^{n+1}.$$

It is the same as the **selection combiner output**.

Lemma 3

$\mathbb{P}(SIR > \theta \mid r, n)$ is given by a series of Laplace transforms of the pdf of interference.

Proof.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(SIR > \theta \mid r, n) &= \mathbb{P}(h_{n+1:n+1} > \theta r^\alpha I_r / P_b \mid r, n) \\ &= \mathbb{E}_{I_r} [1 - F_{h_{n+1:n+1}}(\theta r^\alpha I_r / P_b) \mid r, n, I_r] \\ &\stackrel{(g)}{=} \mathbb{E}_{I_r} [1 - (1 - e^{-\theta r^\alpha I_r / P_b})^{n+1} \mid r, n, I_r] \\ &\stackrel{(h)}{=} \mathbb{E}_{I_r} \left[1 - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k e^{-k\theta r^\alpha I_r / P_b} \mid r, k, I_r \right] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \mathbb{E}_{I_r} [e^{-k\theta r^\alpha I_r / P_b} \mid r, k, I_r] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} \mathcal{L}_{I_r}(kr^\alpha \theta / P_b \mid r, k),\end{aligned}$$

where (g) is shown in p. 60 and (h) is obtained from the binomial theorem.

R : Distance from the tagged user and the associated BS

N : The number of users in the cell of the BS that serves the tagged user, except of the tagged user

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(SIR > \theta) &= \mathbb{E}_{R,N}[\mathbb{P}(SIR > \theta \mid r, n)] \\ &\stackrel{(i)}{\approx} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbb{P}(SIR > \theta \mid r, n) f_R(r) f_N(n) dr \\ &\stackrel{(j)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \frac{2k\theta}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -k\theta\right)} \end{aligned}$$

(i) R and N are assumed to be independent. Its validity will be confirmed through numerical evaluation.

(j)

$$f_R(r) = 2\pi\lambda_b r e^{-\pi\lambda_b r^2}$$

$$f_N(n) = \frac{\Gamma(n+c+1)(\lambda_u/c\lambda_b)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(c+1)(\lambda_u/c\lambda_b+1)^{n+c+1}}, \quad c = 3.5$$

$$\mathbb{P}(SIR > \theta \mid r, n) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} \mathcal{L}_{I_r}(kr^\alpha\theta/P_b \mid r, k),$$

$$\mathcal{L}_I(kr^\alpha\theta/P_b \mid r, k) = \exp\left[-\frac{2\pi\lambda_b r^2 k\theta}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -k\theta\right)\right]$$

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \frac{2k\theta}{\alpha-2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -k\theta\right)}$$

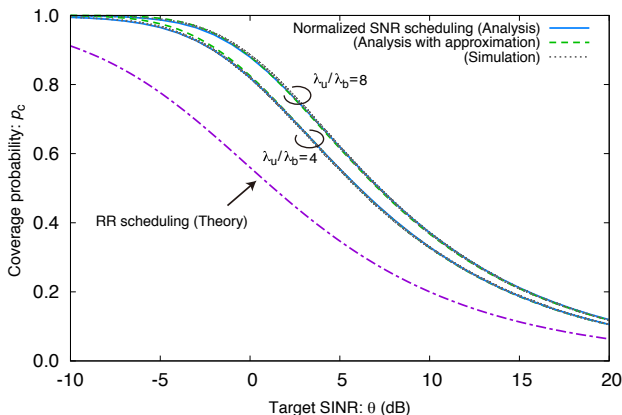
$$\alpha = 4$$

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k\theta} \arctan \sqrt{k\theta}}$$

When λ_u/λ_b is an integer,
 by roughly treating $f_N(\lambda_u/\lambda_b) \simeq 1$ and $f_N(n) \simeq 0$ for $n \neq \lambda_u/\lambda_b$.

$$\mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{k=1}^{\lambda_u/\lambda_b+1} \frac{\binom{\lambda_u/\lambda_b+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k\theta} \arctan \sqrt{k\theta}}$$

Coverage probability (Rayleigh, no noise, and $\alpha = 4$)



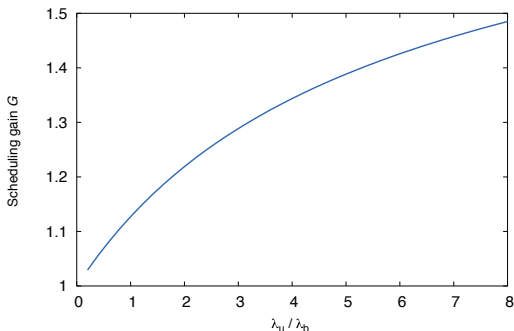
RR scheduling: [Andrews 2011]

$$\text{Analysis } \mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k\bar{\theta}} \arctan \sqrt{k\bar{\theta}}},$$

$$\text{Analysis with approximation } \mathbb{P}(SIR > \theta) \simeq \sum_{k=1}^{\lambda_u/\lambda_b+1} \frac{\binom{\lambda_u/\lambda_b+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k\bar{\theta}} \arctan \sqrt{k\bar{\theta}}}.$$

Average ergodic rate of normalized SNR scheduling:

$$\mathbb{E}[\ln(1 + SIR)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{k} (-1)^{k+1}}{1 + \sqrt{k(e^t - 1)} \arctan \sqrt{k(e^t - 1)}} dt, \quad (\alpha = 4)$$



Scheduling gain (average ergodic rate of normalized SNR scheduling / that of round robin scheduling) increases along with λ_u / λ_b due to multi-user diversity gain.

- ▶ We derived ccdf of SIR (coverage probability) of normalized SNR scheduler as a basic channel-adaptive scheduling scheme in cellular networks.
- ▶ ccdf of SIR is given by a series of Laplace transforms of the pdf of interference and it is only dependent on the target SIR and the ratio of the intensity of users to that of BS, λ_u/λ_b .
- ▶ Numerical results confirmed that normalized SNR scheduling provides a higher ccdf along with λ_u/λ_b because of the multi-user diversity gain.

- [Andrews et al., 2011] Andrews, J. G., Baccelli, F., and Ganti, R. K. (2011).
A tractable approach to coverage and rate in cellular networks.
IEEE Trans. Commun., 59(11):3122–3134.
- [Baddeley et al., 2015] Baddeley, A., Rubak, E., and Turner, R. (2015).
Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R.
CRC Pr.
- [ElSawy et al., 2013] ElSawy, H., Hossain, E., and Haenggi, M. (2013).
Stochastic geometry for modeling, analysis, and design of multi-tier and cognitive cellular wireless networks: A survey.
IEEE Commun. Surveys Tuts., 15(3):996–1019.
- [ElSawy et al., 2017] ElSawy, H., Sultan-Salem, A., Alouini, M.-S., and Win, M. Z. (2017).
Modeling and analysis of cellular networks using stochastic geometry: A tutorial.
IEEE Commun. Surveys Tuts., 19(1):167–203.
- [Gradshteyn and Ryzhik, 2014] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2014).
Table of Integrals, Series, and Products.
Academic Pr., 8th edition.
- [Haenggi, 2012] Haenggi, M. (2012).
Stochastic Geometry for Wireless Networks.
Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.
- [Hayashi and Luo, 2009] Hayashi, S. and Luo, Z.-Q. (2009).
Spectrum management for interference-limited multiuser communication systems.
IEEE Trans. Inf. Theory, 55(3):1153–1175.
- [Raniwala et al., 2004] Raniwala, A., Gopalan, K., and Chiueh, T.-c. (2004).
Centralized channel assignment and routing algorithms for multi-channel wireless mesh networks.
ACM SIGMOBILE Mobile Comp. Commun. Rev., 8(2):50.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(SINR > \theta | r) &= \mathbb{P}\left(\frac{hr^{-\alpha}}{I_r + \sigma^2} > \theta \mid r\right) \\
&= \mathbb{E}_{I_r}[\mathbb{P}(h > \theta r^\alpha (I_r + \sigma^2) \mid r, I_r)] \\
&= \mathbb{E}_{I_r}[e^{-\theta r^\alpha (I_r + \sigma^2)/P_b} \mid r] \\
&= e^{-\theta r^\alpha \sigma^2 / P_b} \mathbb{E}_{I_r}[e^{-\theta r^\alpha I_r / P_b} \mid r] \\
&= e^{-\theta r^\alpha \sigma^2 / P_b} \mathcal{L}_{I_r}(\theta r^\alpha / P_b \mid r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(SINR > \theta) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(SINR > \theta \mid r) f_r(r) dr \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta r^\alpha \sigma^2 / P_b} \mathcal{L}_{I_r}(\theta r^\alpha / P_b \mid r) f_r(r) dr \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta r^\alpha \sigma^2 / P_b} \exp\left[-\frac{2\pi\lambda_b r^2 \theta}{\alpha - 2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)\right] \cdot 2\pi\lambda_b r e^{-\pi\lambda_b r^2} dr \\
&= 2\pi\lambda_b \int_0^\infty e^{-\theta r^\alpha \sigma^2 / P_b} \exp\left\{-\pi\lambda_b r^2 \left[1 + \frac{2\theta}{\alpha - 2} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\alpha}; 2 - \frac{2}{\alpha}; -\theta\right)\right]\right\} dr
\end{aligned}$$

$\sigma^2 = 0$ であれば、この積分を消すことができる (p. 49)