

# 観測可能な情報が一部分に限定される状況に於ける 圧縮センシングを用いたネットワーク構造推定技術の検討

杉本 俊<sup>†</sup> 会田 雅樹<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 首都大学東京 システムデザイン学部 〒191-0065 東京都日野市旭が丘 6-6  
<sup>††</sup> 首都大学東京 システムデザイン研究科 〒191-0065 東京都日野市旭が丘 6-6  
E-mail: †shun-sugimoto@sd.tmu.ac.jp, ††aida@tmu.ac.jp

**あらまし** 社会ネットワークのような大規模複雑ネットワークにおいて、トポロジ構造およびリンクの重みに関する完全な情報を直接観測することは一般的に困難である。先行研究では、ネットワーク上の振動ダイナミクスにおける共鳴現象を利用することで、ネットワーク構造を表現する Laplacian 行列について、その固有値が原理的に推定可能であることを示した。この手法はネットワーク共鳴法と呼ばれる。また、ネットワーク共鳴法による固有ベクトルの推定技術も開発されつつある。推定される固有値・固有ベクトルの精度には限界があり、また、現実的には全ての固有値の情報が観測できるとも限らない。本稿では、圧縮センシングの考え方をを用いることで、観測によって得られる固有値・固有ベクトルの一部から、元々の Laplacian 行列を再構成する手法を提案する。Laplacian 行列を再構成できれば、社会ネットワークのトポロジやリンクの重みなどの構造を知ることができる。

**キーワード** 圧縮センシング, Laplacian 行列, 実対称行列, 固有値, 固有ベクトル

## Reconstruction of Network Structure from Incomplete Set of Observed Information by Using Compressed Sensing

Shun SUGIMOTO<sup>†</sup> and Masaki AIDA<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Faculty of System Design, Tokyo Metropolitan University  
Asahigaoka 6-6, Hino-shi, Tokyo, 191-0065 Japan  
<sup>††</sup> Faculty of System Design, Tokyo Metropolitan University  
Asahigaoka 6-6, Hino-shi, Tokyo, 191-0065 Japan  
E-mail: †shun-sugimoto@sd.tmu.ac.jp, ††aida@tmu.ac.jp

**Abstract** On complex large scale networks like social networks, it is typically impossible to observe complete information about their topology structure or link weight directly. Recent research has proposed the network resonance method that enables to estimate the eigenvalues of the Laplacian matrix representing network structure, by using resonance phenomena of oscillation dynamics on network. In addition, we are developing the estimation method of eigenvectors of the Laplacian matrix based on the resonance. Eigenvalues and eigenvectors estimated in this method have errors, and realistically, it is not always able to be observed all of them. In this paper, by applying the compressed sensing, we propose the new method reconstructing the original Laplacian matrix from a part of its eigenvalues and eigenvectors. If we can reconstruct Laplacian matrix, we expect to understand topology structure or link weight of social networks.

**Key words** compressed sensing, Laplacian matrix, real symmetric matrix, eigenvalue, eigenvector

### 1. はじめに

インターネットの普及により、社会ネットワークの情報交換が活性化している。社会ネットワークの特徴として、トポロ

ジ構造がスケールフリーネットワークであることが挙げられる。スケールフリーネットワークとはノードの次数分布がべき分布に従うネットワークであり、ごく一部のノードが非常に多くのリンクを持つ一方で、大多数のノードは少数のリン

くしか持たない。例えば SNS において、ほとんどのユーザはせいぜい数百人程度のフォロワーを持つ一方で、数百万人もフォロワーを抱える有名人も存在する。このような、フォロワーの関係をリンクと見做すと、SNS 上の社会ネットワークにおいてスケールフリーネットワークの構造を見出すことが出来る [1]。スケールフリーネットワークは、社会ネットワーク以外の様々な分野においても、複雑ネットワークのトポロジ構造に頻繁に現れることが知られている [2]。

ネットワークのトポロジ構造は、ノード  $i$ - $j$  間のリンク情報を行列の  $(i, j)$  成分とすることで、正方行列によって表現することができる。スペクトルグラフ理論とは、ネットワーク構造を表す行列の固有値・固有ベクトルによってネットワークの特性を分析する方法である [3]。逆に、ネットワーク構造を表す正方行列に関して、その固有値・固有ベクトルが分かっているならば、元の正方行列を再現することができ、ネットワークのトポロジ構造を知ることができる。

社会ネットワークを対象としたときのリンクの重みとは、例えば「当該ユーザ間の人間関係の影響の強さ」のような概念である。このような量を直接的に計測することができれば、ネットワークのトポロジ構造を決めることができ、同時にネットワーク構造を表す正方行列を決定することもできる。しかし、人間関係の影響の強さは両者の間で交換するトラフィック量の多寡とは別の概念であるので、情報交換が頻繁だからと言って影響力の強い関係であるとは限らない。そのため、トラフィックの直接観測とは別の方法でリンクの重みを決めてやらなければならない。

我々はこれまで、リンクを介してユーザ間に影響が伝搬するモデルとして「ネットワーク上の振動モデル」を導入し、その性質を調べてきた [4]。我々の導入したネットワーク上の振動モデルは、ノード毎の振動エネルギーがノード中心性（次数中心性や媒介中心性）の拡張概念となる尺度を与えることが明らかになってきた [5]。また、外部からネットワークに強制振動を加えて共鳴現象を利用することで、拡張されたノード中心性の周波数特性からネットワークの固有振動数を推定する「ネットワーク共鳴法」を考案し、その技術的有効性の検討を進めてきた [6]。ネットワーク構造を表す正方行列には、隣接行列と Laplacian 行列があり、どちらの行列からでもネットワーク構造を再現することができるが、ネットワーク上の振動モデルのダイナミクスは Laplacian 行列と直接関連している。事実、ネットワーク共鳴法で推定される固有振動数は、Laplacian 行列の固有値の平方根に対応する。このことから、ネットワーク共鳴法によって原理的にはネットワークの Laplacian 行列の固有値を推定可能である。更に、ネットワーク共鳴法によって Laplacian 行列の固有ベクトルを推定する技術の検討も進んでいる。

このようなネットワーク上の振動モデルに関する一連の検討により、共鳴現象を利用したネットワークの観測から Laplacian 行列の固有値・固有ベクトルを推定する枠組みが整いつつある。もし、Laplacian 行列の固有値・固有ベクトルがネットワークの観測から決定できれば、元の Laplacian 行列を再現

することで、ネットワークのトポロジ構造を知ることが出来るため、個人間の影響の強さとしてのリンクの重みも定量化が可能である。

ネットワーク共鳴法による Laplacian 行列の固有値・固有ベクトルの推定では、固有値の重複や振動の減衰の強さなどの影響により、必ずしも全ての固有値が推定できるとは限らない。従って、Laplacian 行列の固有値・固有ベクトルのうちの一部の情報から、元の Laplacian 行列を再現する技術が求められる。また、固有値・固有ベクトルの推定には誤差を伴うので、それらの誤差によるネットワーク構造の推定への影響を軽減することが必要である。

社会ネットワークはスケールフリー性を持つため、Laplacian 行列の成分の殆どがゼロ成分で占められることになる。このゼロ成分が多数を占めるという性質はスパース性と呼ばれる。圧縮センシングとは、スパース性を持つ未知ベクトルに対して、出来るだけ少ない観測数からの推定を可能にする技術であり、様々な分野で近年盛んに研究されている [7]。本稿では、圧縮センシングのアプローチを取り入れることで、固有値および固有ベクトルの一部から、元の Laplacian 行列を再構成する手法を提案する。この手法は、ネットワーク共鳴法で推定した Laplacian 行列の固有値・固有ベクトルに関する部分情報から、元の Laplacian 行列を再現してネットワーク構造を明らかにする上で重要な役割を持つ。

本稿の構成は以下の通りである。2 節では議論の準備として、スペクトルグラフ理論に関連した用語や基本的な性質と、圧縮センシングの概要について述べる。3 節では、提案手法として、圧縮センシングを利用した Laplacian 行列の再構成法について説明する。4 節では提案手法の評価実験を行い、5 節において課題および今後の展望について述べる。

## 2. 準備

### 2.1 Laplacian 行列の固有値・固有ベクトル

$n$  ノードからなる自己ループを含まない無向グラフを  $G = G(V, E)$  とし、 $V = \{1, 2, \dots, n\}$  はノードの集合、 $E$  はリンクの集合とする。ノード  $i$ - $j$  間のリンク  $(i, j)$  の重みを  $w_{ij} (> 0)$  とすると、無向グラフ  $G(V, E)$  の隣接行列  $A = [A_{ij}]$  は以下のように定義される。

$$A_{ij} := \begin{cases} w_{ij} & ((i, j) \in E) \\ 0 & ((i, j) \notin E) \end{cases} \quad (1)$$

$w_{ij} = w_{ji}$  より、隣接行列  $A$  は実対称行列となる。次に、ノード  $i$  の重み付き次数  $d_i$  を以下のように定義する。

$$d_i := \sum_{j \in \partial i} w_{ij} \quad (2)$$

ここで、 $\partial i$  はノード  $i$  に隣接するノードの集合である。次数行列を  $D := \text{diag}(\{d_i\})$  として  $G(V, E)$  の Laplacian 行列を以下のように定義する。

$$L := D - A \quad (3)$$

$G(V, E)$  は無向グラフなので、Laplacian 行列  $L$  も実対称行列である。そのため、 $L$  の固有値は実数で、固有ベクトルは固有基底を張るように選ぶことができる。また、 $L$  は半正定値行列であり、最小固有値が 0 であることが知られている [3]。そのため、 $L$  の  $n$  個の固有値を小さい順に番号付けして

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$$

とし、固有値  $\lambda_\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ ) に属する固有ベクトル  $v_\mu$  を、

$$L v_\mu = \lambda_\mu v_\mu, \quad v_\mu \cdot v_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

となるように選ぶことができる。ここで  $\delta_{\mu\nu}$  はクロネッカーのデルタである。

$L$  の全ての固有値および固有ベクトルが既知であるとすると、対角行列  $\Lambda := \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  と直交行列  $P := [v_0, v_1, \dots, v_{n-1}]$  に対して

$$L = P \Lambda^t P \quad (4)$$

が成り立つので、固有値および固有ベクトルの情報から Laplacian 行列を再構成することができる。また、Laplacian 行列が分かれば、ネットワーク全体のトポロジ構造を知ることができる。

## 2.2 圧縮センシング

圧縮センシングとは、未知のベクトルを線形観測に基づいて推定する方法の一つである。未知ベクトルを  $n$  次元ベクトル  $x$  としたとき、ベクトル  $x$  に対する線形観測は、観測ベクトルを  $a \in \mathbb{R}^n$  とすると、内積  $a \cdot x$  で表すことができる。この線形観測を  $m$  回行う場合、それぞれの観測ベクトルを  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) とすることで、観測行列  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を

$$F = \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \vdots \\ {}^t a_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

と表記すると、未知ベクトル  $x$  に対する  $m$  回の線形観測は、

$$y = F x \quad (6)$$

のように書くことができる。ここで  $m$  次元ベクトル  $y$  ( $\in \mathbb{R}^m$ ) は、 $m$  回の線形観測の結果  $a_i \cdot x$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) を各成分に持つベクトルである。

観測行列  $F$  が既知であるとき、式 (6) は未知ベクトル  $x$  の各成分を変数とする連立一次方程式に等しい。観測数  $m$  は条件式の数に対応し、 $x$  は  $n$  次元ベクトルなので、これを解くには少なくとも  $m \geq n$  が成り立つ必要がある。しかし、未知ベクトル  $x$  がスパースであるとき、圧縮センシングを適用することで、 $m < n$  においても解を得ることができる。つまり、圧縮センシングは劣一次方程式を解く手法であり、 $\ell_1$  ノルムをコスト関数として、以下のように正則化 (与えられた観測結果の制約の下でのコスト関数の最小化) を行う。

$$\hat{x} = \arg \min_x \|x\|_1 \quad \text{subj. to } y = F x \quad (7)$$

但し、 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  である。式 (7) による正則化を  $\ell_1$  復元といい、圧縮センシングにおいて最も効果的な手法であるとわかっている。未知ベクトル  $x$  に非ゼロ成分が  $k$  個あるとき、 $x$  は  $k$ -スパースであると表現され、 $k$  の値が小さいほどより少ない観測数  $m$  での推定が可能になる。なお圧縮センシングについては、すでに膨大な研究成果が報告されているため、詳細に関してはそれらを参照されたい [7, 8]。

## 2.3 ネットワーク共鳴法と圧縮センシング

我々は、ネットワーク共鳴法 (付録参照) を用いた測定により、Laplacian 行列  $L$  の固有値・固有ベクトルの情報を得て、その情報から  $L$  を再現することを目指している。このとき、測定により得られる固有値・固有ベクトルの情報は一般に誤差を含んでおり、また全ての固有値・固有ベクトルの情報が得られるとは限らない。そのような場合には式 (4) を利用した Laplacian 行列  $L$  の推定は不可能である。

この問題を回避するためのアプローチとして、圧縮センシングを利用した Laplacian 行列の再構成を考える。一般に、社会ネットワークのリンク構造はスパースであるため、Laplacian 行列もスパース性がある。圧縮センシングでは、 $n$  個の未知変数を、それより少ない  $m$  個の観測から推定することができる。本研究ではこの性質を利用し、 $n$  個の固有値および固有ベクトルの中から、ネットワーク共鳴法によって得られた誤差の少ないものを  $m$  個だけ選択して、Laplacian 行列の再構成に利用する。これによって式 (4) のように全ての固有値・固有ベクトルの情報を利用しなくとも、元の Laplacian 行列の再構成が可能になる。

## 3. 圧縮センシングを用いた Laplacian 行列の推定法

### 3.1 提案手法

本項では圧縮センシングを用いた Laplacian 行列の推定法の提案を行う。なお、行列を角括弧  $[\ ]$ 、ベクトルを丸括弧  $( )$  のように表記を区別する。

まず始めに、推定をする未知の Laplacian 行列  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を

$$L = \begin{bmatrix} {}^t l_0 \\ {}^t l_1 \\ \vdots \\ {}^t l_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

のように、行ベクトル  ${}^t l_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) に分解して表現する。これを用いて Laplacian 行列  $L$  の固有値方程式

$$L v_i = \lambda_i v_i \quad (9)$$

を表すと、式 (9) の左辺は、

$$\mathbf{L} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} {}^t l_0 \\ {}^t l_1 \\ \vdots \\ {}^t l_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} l_0 \cdot \mathbf{v}_i \\ l_1 \cdot \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ l_{n-1} \cdot \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書くことができる。固有ベクトル  $\mathbf{v}_i$  の各成分を  $v_i(j)$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) として式 (9) と (10) から第  $j$  成分同士を取り出すと、

$$\lambda_i v_i(j) = l_j \cdot v_i \quad (11)$$

となる。右辺は内積なので、順序を逆にすることで

$$\lambda_i v_i(j) = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{l}_j \quad (12)$$

となる。この式は両辺がスカラーであり、与えられた  $j$  に対して  $i = 0, 1, \dots, n-1$  に関する  $n$  個の関係式と考えることができる。いま、この  $n$  個の関係式から  $m$  個 ( $m < n$ ) 選択して、選択した固有値と固有ベクトルを改めてそれぞれ  $\bar{\lambda}_k$  及び  $\bar{\mathbf{v}}_k = (\bar{v}_k(0), \bar{v}_k(1), \dots, \bar{v}_k(n-1))$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) と表すことにする。選択した  $m$  個の固有値・固有ベクトルについて、式 (12) の関係をベクトルとして並べると、

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1(j) \\ \bar{\lambda}_2 \bar{v}_2(j) \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_m \bar{v}_m(j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{bmatrix} \mathbf{l}_j \quad (13)$$

のように表すことができる。ここで、式 (13) の左辺を  $\mathbf{y}$ 、右辺から  $\mathbf{F} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m]$ 、 $\mathbf{x} = \mathbf{l}_j$  のようにおくと、式 (13) は圧縮センシングの式 (6) と同じ形となる。よって、 $\bar{\mathbf{l}}_j$  がスパースなとき、 $m$  ( $m < n$ ) 個の固有値・固有ベクトルから、未知の Laplacian 行列の第  $j$  行ベクトルを推定することができる。そして、この推定を全行ベクトル  $j = 0, 1, \dots, n-1$  に対して行うことで、Laplacian 行列  $\mathbf{L}$  全体を復元することが可能になる。

この手法は Laplacian 行列だけではなく、他の実対称行列に対しても拡張が可能である。有向グラフに対応した非対称な Laplacian 行列への適用に関しては、固有値が一般に複素数となるため困難であるが、有向グラフの中でも対称化可能な性質を持つグラフ [4] については固有値が実数になることが保証されており、適用可能である。

### 3.2 類似手法との違い

式 (4) のような対角行列および直交行列を利用した行列の再構成では、全ての固有値と固有ベクトルを利用することになる。しかし、上述したようにネットワーク共鳴法では全ての固有値・固有ベクトルを推定できるとは限らず、また、推定精度にもばらつきがある。そのため式 (4) によって Laplacian 行列を復元することは困難である。

次に、実対称行列の低ランク近似について考える。式 (4) は、以下のように書くことができる。

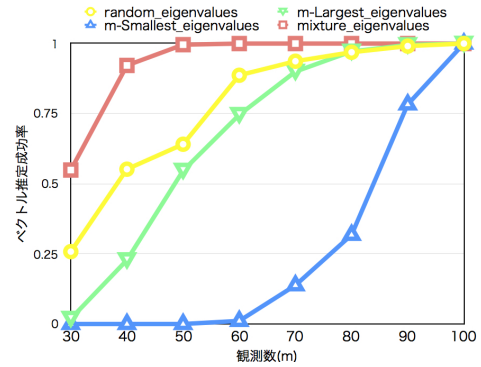


図1 観測数および用いる固有値を変化させたときの推定成功率

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^t = \sum_{\mu=0}^{n-1} \lambda_{\mu} \mathbf{v}_{\mu} \mathbf{v}_{\mu}^t \quad (14)$$

最右辺の各項は、固有値  $\lambda_{\mu}$  が大きいほど  $\mathbf{L}$  への寄与が大きいため、最大固有値から順にいくつかの項のみで実対称行列の近似が可能となる。しかしこの手法では、大きい値をとる固有値が欠損もしくはノイズを大きく含んだ場合に、推定精度が悪くなる。一方、提案手法では、大きな値をとる固有値を全て必要とするわけではなく、比較的柔軟に固有値を選択して利用することができる。

## 4. 提案手法の評価実験

### 4.1 実験の準備

社会ネットワークを含む多くの複雑ネットワークがスケールフリー性を持つことが知られている。これを踏まえ、実験でもスケールフリー性を持つネットワークを用いる。具体的には、BA モデル [9] によって生成されたスケールフリーネットワークに対する Laplacian 行列の再構成を行う。

BA モデルによりネットワークを生成する際、初期状態はノード数 3 の完全グラフとし、ノードを一つ加える毎に優先的选择によって選んだ 3 つのノードに対してリンクを張り、最終的にノード数  $n = 100$  になるまでネットワーク成長させた。

なお、以降の評価結果に現れる評価値は、スケールフリーネットワークを独立に生成した 10 個の異なるネットワークモデル上で実験した結果の平均をとったものである。

### 4.2 ノイズなし推定

本項では、提案手法の基本性能を検証する。生成したスケールフリーネットワークのリンクの重みを全て 1 とし、その Laplacian 行列が未知であるとする。Laplacian 行列の固有値とそれに属する固有ベクトルの組が、誤差を含まないで  $m$  組選択できたとしよう。また、評価指標としてベクトル推定成功率というものを導入する。これは推定が成功した行ベクトルの割合を示す。ベクトルの推定の成功とは、ベクトルの全成分において実際値と推定値の差異が 0.01 未満であった場合とする。観測数  $m$  (推定に用いる固有値・固有ベクトルの組の数) および推定に利用する固有値 (値の大小) を変更させた場合のベクトル推定成功率について評価する。

図 1 は、観測数  $m$  および推定に用いる固有値の選択法を変

化させたときのベクトル推定成功率を折れ線グラフにしたものである。ここで、推定に用いる固有値の選択法について説明する。random は固有値全体からランダムに  $m$  個選択する方法、 $m$ -Largest は固有値を大きいものから順に  $m$  個選択する方法、 $m$ -Smallest は小さいものから順に  $m$  個選択する方法で、mixture とは 固有値を大きいものから順に  $(7/8) \times m$  個、小さいものから順に  $(1/8) \times m$  個利用した推定法となる。mixture における大きい固有値と小さい固有値の混在の比率の根拠は、実験の通じて最も推定性能が高い組み合わせとなったことに基づいている。

図 1 から、観測数の変化に関わらず最もベクトル推定成功率が低いのは  $m$ -Smallest ( $\triangle$ ) である。これは、小さい固有値を観測数として増やしたところであまり推定精度は上がらないことを示す。また  $m$ -Largest ( $\nabla$ ) は  $m$ -Smallest に比べて全体的にベクトル推定成功率が高くなっている。しかし、どちらも random ( $\circ$ ) の成功率には及ばないことがわかる。以上から、大きい固有値と小さい固有値のどちらも推定の精度に寄与し、かつ大きい固有値を多く用いた方が推定精度は高いといえる。mixture ( $\square$ ) でのベクトル推定成功率がこれを裏付けており、全体の半分の固有値と固有ベクトルしか利用していない場合 ( $m = 50$ ) でも、ほぼ全てのベクトルを正確に推定できている。大きい固有値と小さい固有値の混在比率は 7:1 のときが最適であったが、6:1 や 5:1 のときもほぼ同様の値を取っている。

### 4.3 ノイズあり推定

本項では、現実的な推定状況を考慮して、Laplacian 行列の固有値と固有ベクトルに対して一定のノイズ (誤差) を付与した状態での推定を行う。まず BA モデルによりスケールフリーネットワークを生成し、リンクの重みは区間  $[0, 1]$  の一様乱数に 0.1 を加えた (重みが 0 となるのを防ぐため) ものをそれぞれのリンクに与える。つまり、リンクの重みをリンク毎に区間  $[0.1, 1.1]$  の一様乱数に従って与えた。また、このネットワークの Laplacian 行列から、推定に用いる  $m$  個の固有値およびそれに属する固有ベクトルの全成分に対して、それぞれに正規分布 ( $\mu = 0, \sigma = 0.01$ ) に従う乱数をノイズとして与えた。

固有値と固有ベクトル成分にノイズが含まれているため、圧縮センシングとしての完全再構成 (完全に一致する解を推定すること) は不可能である。よって、Laplacian 行列における各成分の実際値と推定値との絶対誤差を用いて性能を評価することにする。推定に用いる固有値の選択法は mixture を利用し、観測数を変化させた結果、図 2 のようになった。

平均誤差は、全成分の誤差の絶対値を平均したものであり、最大誤差は、全成分の中で最も誤差が大きかったものである。図 2 からわかるように、最大誤差は観測数とともに減少しているが、誤差平均は  $m = 70$  を最小値として、その後、誤差が増加している。これは、ノイズが含まれることで真の解を得ることが出来ないにも関わらず、観測数が増えることで解に対する条件が厳しくなっていることが原因だと考えられる。よって、推定に利用する固有値を増やすことが必ずしも精度が向上に結びつくとはいえない。

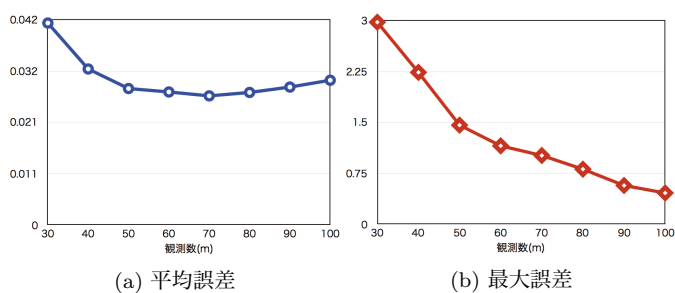


図 2 Laplacian 行列と推定した行列の絶対誤差

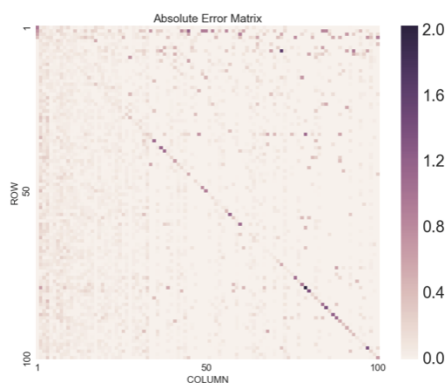


図 3 Laplacian 行列と推定行列の誤差行列 ( $m = 40$ )

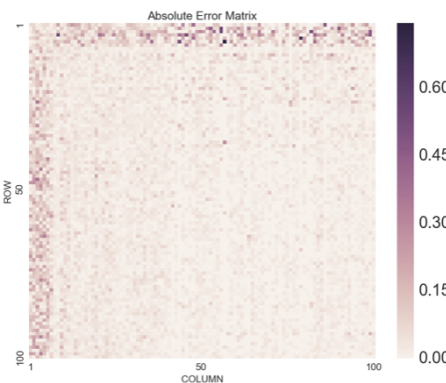


図 4 Laplacian 行列と推定行列の誤差行列 ( $m = 80$ )

推定した行列と実際の行列の全成分の誤差を、ヒートマップで可視化したものが図 3 及び図 4 である。スケールに注意すると、観測数が  $m = 40$  から  $m = 80$  に変化することで全体的に誤差が少なくなっていることがわかる。また、 $m = 40$  では対角成分に誤差が集中している一方で、 $m = 80$  ではリンクの集中している成分に誤差が強く見られる。つまり、観測数を増やすことで、対角成分およびスパース性の高い後続の行ベクトルは、正確に推定ができるようになる。しかし、最大誤差を見れば、おおよそ区間  $[0.1, 1.1]$  の成分に対して、0.8 前後の誤差が含まれてしまうことは問題である。

## 5. まとめと今後の研究方針

本稿では、圧縮センシングのアプローチを用いることで、スパース性の高い実対称行列の一部の固有値および固有ベクトルから、その行列を再構成するという手法を提案し、性能を検

証した。課題として、固有値と固有ベクトルに誤差が含まれる状況では、多数の固有値を用いたとしても、推定した行列の一部に比較的大きな誤差が発生してしまうことがある。これは、ネットワーク上の次数の大きい一部のノードの存在による、スパース性の低下が影響していると考えられる。しかし、スケールフリーネットワークにおいては、その規模が大きくなるほど、全ノード数に対する最大次数の割合が小さくなっていくため、この誤差は小さくなると考えられる。推定精度を高めるために、値の大きい固有値と小さい固有値を混ぜ合わせて利用する必要があるが、実対称行列の低ランク近似と比較すると、柔軟に固有値を選択することが可能である。

今後の研究として、推定精度に寄与する固有値について、より精密に調査をする。また、類似手法である実対称行列の低ランク近似と本提案手法との性能の比較を予定している。

## 付 録

### 1. ネットワーク共鳴法

ネットワーク共鳴法では、ノード間がバネで連結されているようなネットワークの結合振動子システムを考える。時刻  $t$  において、 $n$  ノードからなるネットワーク上のノード  $i$  の変位を表すベクトルを  $\mathbf{x}(t) = \{x_i(t)\}$  とする。ノード  $i$  の質量を  $m_i$  とし、隣接ノード  $i-j$  間に変位の差に比例したばね定数  $w_{ij}$  の復元力が働くとする。このとき、ノード  $j$  に対して振動数  $\omega$  で周期的な外力  $F$  を作用させると、ネットワークの強制振動の運動方程式は次式となる。 ( $\mathbf{M} := \text{diag}\{m_i\}$ )

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} + \mathbf{M} \gamma \frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} + \mathbf{L} \mathbf{x}(t) = (F \cos \omega t) \mathbf{1}_{\{j\}}$$

$\gamma$  は定数、 $\mathbf{1}_{\{j\}}$  は第  $j$  成分のみ 1 でその他は 0 であるような列ベクトルである。ここで、 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{x}(t)$  を用いると、上記運動方程式は以下のようにスケール変換できる。

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d \mathbf{y}(t)}{dt} + \mathbf{S} \mathbf{y}(t) = \frac{F \cos \omega t}{\sqrt{m_j}} \mathbf{1}_{\{j\}} \quad (\text{A.1})$$

$\mathbf{S} (= \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{L} \mathbf{M}^{-1/2})$  は scaled Laplacian 行列と呼ばれる実対称行列である。 $\mathbf{S}$  の昇順に並べた固有値を  $\lambda_\mu$ 、固有ベクトルを  $\mathbf{v}_\mu$  とすると、定常状態における解  $\mathbf{x}(t)$  は

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2} \sum_{\mu=0}^{n-1} A_\mu(\omega) \cos(\omega t + \theta_\mu(\omega)) \mathbf{v}_\mu \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで、 $A_\mu(\omega)$  と  $\theta_\mu(\omega)$  はモード  $\mu$  の振幅と位相である。 $\omega_\mu = \sqrt{\lambda_\mu}$  を利用すると、以下のように書ける。

$$A_\mu(\omega) = \frac{F v_\mu(j)}{\sqrt{m_j}} \frac{1}{\sqrt{(\omega_\mu^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (\text{A.3})$$

$$\theta_\mu(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_\mu^2} \right) \quad (\text{A.4})$$

式 (A.3) より、外力の振動数  $\omega$  が  $\omega_\mu$  近傍で  $A_\mu(\omega)$  は極大する。この時、 $A_\mu(\omega)$  を極大にする外力の振動数  $\omega = \omega_\mu^{\max}$  は

$$\omega_\mu^{\max} = \sqrt{\omega_\mu^2 - \gamma^2/2} \quad (\text{A.5})$$

である。最大振幅  $A_\mu(\omega_\mu^{\max})$  の  $1/\sqrt{2}$  倍となる高さの直線と曲線  $A_\mu(\omega)$  の交点となる  $\omega$  をそれぞれ  $\omega_\mu^-$ 、 $\omega_\mu^+$  ( $\omega_\mu^- < \omega_\mu^+$ ) とする。 $\gamma \ll \omega_\mu$  で  $\omega \simeq \omega_\mu$  のとき、固有振動数  $\omega_\mu$  及び定数  $\gamma$  は、近似的に以下のように書ける。

$$\omega_\mu \simeq 2\omega_\mu^\pm - \sqrt{2(\omega_\mu^\pm)^2 - (\omega_\mu^{\max})^2} \quad (\text{複号同順}) \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma \simeq \omega_\mu^+ - \omega_\mu^- \quad (\text{A.7})$$

$\omega_\mu^-$ 、 $\omega_\mu^+$ 、 $\omega_\mu^{\max}$  を式 (A.7) に代入して固有振動数  $\omega_\mu$  の推定値が得られる。しかし、実際にノード  $i$  から観測できるのは、変位  $x_i(t)$  の最大値としての振幅  $a_i(\omega)$

$$a_i(\omega) = \max \left| \frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum_{\mu=0}^{n-1} A_\mu(\omega) \cos(\omega t + \theta_\mu(\omega)) v_\mu(i) \right| \quad (\text{A.8})$$

であり、各モード  $\mu$  の振幅  $A_\mu(\omega)$  を直接観測することはできず、 $\omega_\mu^-$ 、 $\omega_\mu^+$ 、 $\omega_\mu^{\max}$  を求めることはできない。式 (A.3)、(A.8) から、ノードの振幅  $a_i(\omega)$  において  $\omega$  が  $\omega_\mu$  の近傍にあるとき、 $a_i(\omega)$  への寄与が一番大きい項はモード  $\mu$  の項だと予想できる。ゆえに、モードの振幅と同様にノードの振幅の各ピークに対して、 $\omega_\mu^-$ 、 $\omega_\mu^+$ 、 $\omega_\mu^{\max}$  に相当するものを求めることで固有振動数の推定が可能になる。固有振動数  $\omega_\mu$  が得られれば、 $\lambda_\mu = \omega_\mu^2$  を用いて推定固有値が得ることができる。固有ベクトルの推定に関しては、[10] で現在研究が進められている。

## 文 献

- [1] K. Yuta, N. Ono and Y. Fujiwara, "Structural Analysis of Human Network in Social Networking Services," Transactions of Information Processing Society of Japan, vol. 47, no. 3, pp. 865–874, 2005.
- [2] T. Nishibe, "地域通貨の流通ネットワーク分析," IPSJ Magazine, vol. 49, no. 3, pp. 290–297, 2008.
- [3] D. Spielman, "Spectral Graph Theory," Chapter 18 of *Combinatorial Scientific Computing*, Chapman and Hall/CRC, pp. 495–524, 2012.
- [4] M. Aida, "Oscillation model for describing propagation of activities on network caused by asymmetric node interactions," Keynote Speech, IEICE Information and Communication Technology Forum 2016 (ICTF 2016), 2016.
- [5] C. Takano and M. Aida, "Proposal of new index for describing node centralities based on oscillation dynamics on networks," IEEE GLOBECOM 2016, 2016.
- [6] S. Furutani, C. Takano and M. Aida, "Proposal of the network resonance method for estimating eigenvalues of the scaled Laplacian matrix," The 8th International Conference on Intelligent Networking and Collaborative Systems (INCoS 2016) Workshop (WIND 2016), 2016.
- [7] D. Donoho, "Compressed sensing," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [8] T. Wadayama, "Sufficient Condition for Perfect Recovery in Compressed Sensing," 日本神経回路学会誌, vol. 17, no. 2, pp. 63–69, 2010.
- [9] A. L. Barabasi and R. Albert, "Emergence of scaling in random networks," Science 286, pp. 509–512, 1999.
- [10] 古谷諭史, 高野知佐, 会田雅樹, "ネットワーク上の振動ダイナミクスの共鳴を利用した scaled Laplacian 行列の固有ベクトル推定手法の検討," 電子情報通信学会 情報ネットワーク研究会 (発表予定), 2017-3.