

ランダム行列を用いた社会ネットワーク分析法の検討

亀山 元[†] 高野 知佐^{††} 会田 雅樹[†]

[†] 首都大学東京 システムデザイン研究科 〒191-0065 東京都日野市旭が丘 6-6

^{††} 広島市立大学 情報科学研究科 〒731-3149 広島市安佐南区大塚東 3-4-1

E-mail: †kameyama-tsukasa@sd.tmu.ac.jp, aida@tmu.ac.jp, ††takano@hiroshima-cu.ac.jp

あらまし スペクトルグラフ理論では、ネットワーク構造を行列で表すことで代数的な分析を行うことができる。しかし大規模な社会ネットワークではネットワーク構造の詳細を知ることは困難で、ネットワーク構造を表す行列が与えられることを前提とした分析法を実現することは難しい。本研究では、ネットワーク構造を表す行列をランダム行列として与え、ランダム行列の普遍的な性質を用いて大規模社会ネットワークの特性を分析する方法の確立を目指す。先行研究においては、ある条件下で、リンクに重みのないグラフの正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布が半円則に従うことが報告されている。本稿では、リンクの重みを乱数で与えたグラフの正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布を評価し、固有値分布が半円則を満たすための条件を実験的に調査する。また、半円則が成り立つ場合の社会ネットワーク分析の応用例についても述べる。

キーワード 社会ネットワーク, ラプラシアン行列, ランダム行列, 固有値密度分布, 半円則

Study on Social Network Analysis using Random Matrix

Tsukasa KAMEYAMA[†], Chisa TAKANO^{††}, and Masaki AIDA[†]

[†] Faculty of System Design, Tokyo Metropolitan University
Asahigaoka 6-6, Hino-shi, Tokyo, 191-0065 Japan

^{††} Graduate School of Information Sciences, Hiroshima City University
Hiroshima-shi, Hiroshima, 731-3149 Japan

E-mail: †kameyama-tsukasa@sd.tmu.ac.jp, aida@tmu.ac.jp, ††takano@hiroshima-cu.ac.jp

Abstract Spectral graph theory gives an algebraical approach to analyze network structure by using a matrix. However, in large social networks, it is difficult to know the details of its network structure, and we cannot expect that a matrix representing the network structure is given as a priori knowledge. The objective of this research is to give a method to analyze the characteristics of a large social network by using the universal nature of random matrices that represents the structure of networks. Existing studies have been reported that the spectral density of the normalized Laplacian matrix of the weightless link follows the semicircle law under a certain conditions. In this paper, we evaluate the spectral density of the normalized Laplacian matrix of the randomly weighted links, and investigate conditions for the spectral density to satisfy the semicircle law, experimentally. In addition, we show an application of the proposed method to social network analysis.

Key words social network, Laplacian matrix, random matrix, spectral density, semicircle law

1. はじめに

ネットワークとは頂点と辺によって構成されるシステムである。実世界には、人や事物を頂点、事物間の関係性を辺とみなすことによりネットワークとして捉えられる構造が数多く存在する。特に、友人関係のネットワークや企業間の取引ネットワークのように、我々の社会活動と密接に関わっているネット

ワークは社会ネットワークと呼ばれる。ネットワークでは一般に、構成要素単体の性質ではなく、これらの相互関係によって生み出される性質が本質的なことが多い。そのため、社会ネットワークの構造的特性や動的特性が適切に分析できれば、我々の生活にとって有益な情報をもたらす可能性があると考えられる。

スペクトルグラフ理論では、ネットワーク構造を隣接行列や

ラプラシアン行列で表現し、その固有値や固有ベクトルを分析することでネットワークの構造的特性や動的特性を代数的に分析することが可能である [1]。この理論を実際の社会ネットワーク分析に適用することを考えると、社会ネットワークは大規模で複雑なネットワークであるため、行列のサイズが巨大になるばかりでなく、リンクの構造を表す行列の要素の情報をあらかじめ全て知ることができるとは期待できない。つまり、スペクトルグラフ理論の適用以前に、その前提となるネットワーク構造を行列で表す段階で、困難を抱えていることになる。

ランダム行列とは、行列の成分が乱数で与えられる行列であり、量子力学において用いられてきた。その考え方は以下のとおりである。量子力学では、原子核の周りの電子の軌道を計算するときに、行列を用いた定式化を用いることがある。水素やヘリウムのような電子の数が少ない原子では、小さなサイズの行列を扱うことになるが、ウランウムのような原子番号の大きな原子では多数の電子が存在し、それにともなう行列のサイズも大きくなる。更に、それらの電子の軌道を表すように行列の成分を決めることは非常に困難である。そこで、複雑な電子の軌道を考えるのを放棄し、行列の成分を乱数で与えてみてその普遍的な性質を考察する、というものである。

社会ネットワークにおいても、その大規模性や複雑性から、構造を表す行列を取得するのは容易ではない。しかし、ネットワーク構造を正確に行列で表現することを放棄し、ランダム行列でネットワーク構造を与えたとして、そこから現れる様々なネットワークに対して共通するような普遍的な性質があれば、即ちそれは大規模で複雑な社会ネットワークが持っている構造であるとみなすことができるのではないだろうか。

ネットワークの構造をランダム行列で与えたときの固有値の統計的性質を表す量の中でも基本的なものとして、固有値密度分布がある。固有値密度分布を調査することにより、大規模なネットワークの構造的特性や動的特性に関する多くの知見を得ることができる。そのため、隣接行列やラプラシアン行列の固有値密度分布に関する研究が盛んに行われている [2–4]。また、適当な条件下のランダム行列に対して固有値密度分布が Wigner の半円則と呼ばれる分布に従うという普遍性が知られている [5]。

本研究は、ネットワーク構造を表す行列をランダム行列として与え、ランダム行列の普遍的な性質を用いて大規模社会ネットワークの特性を分析する方法を目指すものである。文献 [6] において、ある条件下でリンクに重みのないランダムグラフの正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布が半円則に従うことが報告されている。しかし、社会ネットワークでは、一般的にノード間の関係の強さが異なるため、リンクの重みを考慮する必要がある。そこで本研究では、リンクの重みを乱数で与えたグラフの正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布を評価し、固有値密度分布が半円則を満たすための条件を実験的に調査する。また、半円則が成り立つ場合の社会ネットワーク分析の応用例についても述べる。

本稿の構成は以下の通りである。2 節では、社会ネットワークを表す代表的な二つのネットワークである ER ネットワーク

と BA ネットワークについて述べた後、ラプラシアン行列と Wigner の半円則について述べる。3 節では、本研究で用いるネットワーク構造を表すランダム行列と実験概要について述べる。4 節では、調査結果を述べた後、結果に対する考察と社会ネットワーク分析の応用例について述べる。5 節では、本稿のまとめと今後の課題について述べる。

2. 準備

本節では、本研究で利用する幾つかの基礎的な事項について説明する。

2.1 ER ネットワークと BA ネットワーク

本項では、社会ネットワークを表す代表的なネットワークモデルである、ER ネットワーク [7] と BA ネットワーク [8] について説明する。

ER ネットワークとはノード間のリンクが一定の確率 p で張られたネットワークである。また、不規則な構造をもち、特別なノードや次数相関がない。そのため、ネットワークの特徴を比較評価する際の基準として考えることができる。

BA ネットワークとはノード数が時間の経過とともに増加する成長則、及び次数の大きいノードほどリンクが張られやすいという優先的選択則により構築されるスケールフリーネットワークである。BA ネットワークは以下の手順で生成される。

1. m_0 個のノードからなる完全グラフ K_{m_0} を生成する。
2. 現時点のノード数を n としたとき、既存のノードの中から m 個のノードを以下の確率 Π_i で選択する。

$$\Pi_i = \frac{d_i}{\sum_{j=1}^n d_j} \quad (1)$$

ここで、 d_i はノード i の次数を表す。

3. m 本のリンクを持つ新たなノードを追加する。
4. m 本のリンクをステップ 2 で選択された m 個のノードに接続する。
5. ステップ 2～ステップ 4 を目的のノード数になるまで繰り返す。

また、BA ネットワークは優先的選択則によって、次数の大きいノードは新たなリンクを獲得しやすくなっているためハブ構造ができやすい。

2.2 ラプラシアン行列

本項では、ラプラシアン行列について説明する。 n 個のノードからなる無向グラフ $G(V, E)$ を考える。ここで、 V はノードの集合、 E はリンクの集合を表す。グラフのリンク構造を表す正方行列 $\mathbf{A}$ を隣接行列といい、グラフ G の隣接行列 $\mathbf{A} = [A_{ij}]$ は以下のように定義される。

$$A_{ij} := \begin{cases} w_{ij} & ((i, j) \in E) \\ 0 & ((i, j) \notin E) \end{cases} \quad (2)$$

$w_{ij} > 0$ はリンクの重みを表す。また、グラフ G は無向グラフなので隣接行列 $\mathbf{A}$ は $A_{ij} = A_{ji}$ であり、対称行列である。次に、ノード i の次数 d_i を対角成分にもつ次数行列 $\mathbf{D} = [D_{ij}]$ を以下のように定義する。

$$D_{ij} := \begin{cases} d_i & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (3)$$

隣接行列 A 及び次数行列 D を用いて、ラプラシアン行列を以下のように定義する。

$$L := D - A \quad (4)$$

ラプラシアン行列 L は定義から分かるように実対称行列であるため、正規直交固有ベクトルを並べた直交行列 P で対角化が可能である。したがって、ラプラシアン行列 L はその固有値 $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ と P によって以下のように書くことができる。

$$L := P \Lambda P^{-1} \quad (5)$$

式 (5) はラプラシアン行列 L はその固有値と固有ベクトルで表現できることを示している。つまり、 L の固有値及び固有ベクトルを解析することは、グラフ構造を分析することと同義である。

また、ラプラシアン行列 L を次数 D でスケーリングした正規化ラプラシアン行列 N を以下のように定義する。

$$N := D^{-1/2} L D^{-1/2} \quad (6)$$

一般に、社会ネットワークでは次数分布がネットワーク構造に与える影響が大きい。次数分布以外のネットワーク構造を知るためには、ノード次数で正規化した正規化ラプラシアン行列 N を用いて次数の違いを打ち消すことが必要である。そのため、本研究では正規化ラプラシアン行列 N を分析対象とする。

2.3 Wigner の半円則

本項では、ランダム行列における普遍性の代表例の一つである Wigner の半円則について説明する。

まず、 $n \times n$ の実対称行列 $X = [X_{ij}]$ の成分 X_{ij} ($j \geq i$) がそれぞれ独立で同一な確率分布関数に従う乱数で与えられているとする。このとき、 X_{ij} の奇数次のモーメントは 0 で、分散を σ^2 とする。また、行列 X が与えられたとき、その固有値のサンプルを λ_i ($i = 1, \dots, n$) とする。このとき、 $\lambda_i/\sqrt{n}$ の密度関数を考える。この量は、行列 X の各成分を全て $1/\sqrt{n}$ 倍した行列 $X/\sqrt{n}$ の固有値でもある。 $\lambda_i/\sqrt{n}$ の値の分布を表す密度関数 $\rho(x)$ は以下のように書ける。

$$\rho(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta(x - \lambda_j/\sqrt{n}) \quad (7)$$

ここで、 δ はディラックのデルタ関数である。

次に、 n が十分に大きい場合における $\rho(x)$ を考える。ランダム行列の次元数が十分に大きい場合、一つのランダム行列においても平均的な性質が実現される自己平均性が成り立つことが知られている。このとき、規格化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$ が成り立つため、 $\rho(x)$ を確率密度関数とみなすことができ、 $\rho(x)$ は以下の関数に従う。

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} & (|x| < 2\sqrt{\sigma^2}) \\ 0 & (|x| > 2\sqrt{\sigma^2}) \end{cases} \quad (8)$$

式 (8) の $|x| < 2\sqrt{\sigma^2}$ における、右辺 $\sqrt{4\sigma^2 - x^2}$ が半円の式の形をしていることから、これを Wigner の半円則という。

3. 研究概要

本節では、ランダム行列を用いてネットワーク構造を表現する方法を説明した後、本研究で行った実験的調査の概要を説明する。

3.1 ネットワーク構造を表すランダム行列

本項では、ネットワーク構造を表す行列をランダム行列として与える意義とその生成方法について説明する。

先行研究において、リンクに重みのないグラフ G における最小次数を $d_{\min}$ 、平均次数を d_{ave} としたとき、 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たす場合、グラフ G の正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布は半円則に従うことが報告されている [6]。しかし、実際の社会ネットワークではノード間の関係性の強さが一般に異なるので、リンクの重みの違いを考慮する必要がある。本研究では、リンクの重みを乱数で与えたネットワーク構造を表すランダム行列を用いて、正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布が半円則に従うかどうかを調査する。その際、元のグラフは社会ネットワークを表す代表的な ER ネットワークと BA ネットワークを用いる。以下にネットワーク構造を表すランダム行列の生成方法を示す。

1. リンクの重みが全て 1 となる ER ネットワークまたは BA ネットワークを生成する。
2. 生成されたネットワークの隣接行列 A の上三角成分 A_{ij} ($i > j$) に対して、乱数 r_{ij} を掛ける。これを用いて乱数の重みの付いたグラフの隣接行列の成分 $\bar{A}_{ij} = r_{ij} A_{ij}$ を決定する。
3. 下三角成分を $\bar{A}_{ji} = \bar{A}_{ij}$ とする。
4. 乱数の重みの付いたグラフの次数行列 $\bar{D} = [\bar{D}_{ij}]$ を $\bar{D}_{ii} = \sum_{j=1}^n \bar{A}_{ij}$ ($i \neq j$) とする。
5. 乱数の重みの付いたグラフの正規化ラプラシアン行列 $\bar{N} = \bar{D}^{-1/2} (\bar{D} - \bar{A}) \bar{D}^{-1/2}$ を得る。

3.2 実験概要

本研究の目的は、ネットワーク構造を表す行列をランダム行列として与え、普遍的な性質を用いて大規模社会ネットワークの特性を分析する方法の検討である。本項では、目的達成のために行った実験的調査の概要について説明する。

リンクに重みのあるネットワークの特性を分析するためには、リンクの重みを乱数で与えたネットワーク構造を表すランダム行列を用いて、乱数に依らない性質を調査する必要がある。そこで、本研究ではリンクの重みをカイ二乗乱数、一様乱数、指数乱数の三種類の乱数で与えたネットワーク構造を表すランダム行列における正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布を分析し、普遍的な性質を調査する。また、正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布の普遍的な性質を用いて大規模社会ネットワークの特性を分析する方法を検討する、ただし、それぞれの

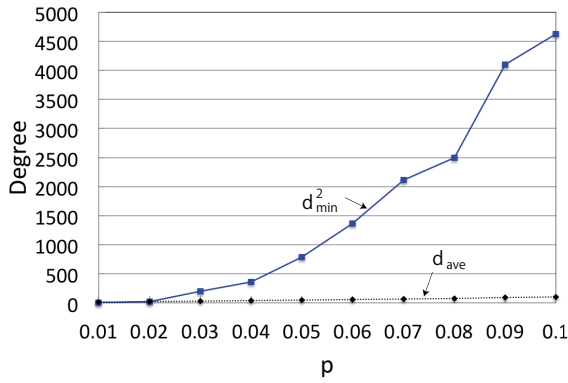


図1 最小次数の2乗と平均次数

乱数の平均値は2とし、カイ二乗乱数の自由度は3、一様乱数の区間は[0,4]とした。

4. 結果

本節では、まず、ネットワーク構造を表すランダム行列の正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布を評価し、固有値密度分布が半円則を満たすための条件を実験的に調査した結果を示す。次に、結果に対する考察と社会ネットワーク分析の応用例について述べる。

4.1 リンクの重みを考慮した ER ネットワークにおける結果

本項では、リンクの重みを乱数で与えた ER ネットワークにおける正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布が半円則を満たすための条件の調査結果を示す。また、ノード数 $n = 1000$ とし、分析結果は50回の平均とした。

図1は、ER ネットワークにおけるリンクを張る確率 p の変化に対する、リンクの重みを1とした ER ネットワークの最小次数の2乗 $d_{\min}^2$ と平均次数 d_{ave} の変化を示したものである。 p が大きくなるにつれ、 $d_{\min}^2$ 、 d_{ave} ともに大きくなっており、 $d_{\min}^2$ は d_{ave} に比べ2乗の分だけ急激に増加している。また、リンクの重みを1とした ER ネットワークにおける正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布が半円則に従う条件 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たすには、 $d_{\min}^2 > d_{\text{ave}}$ を満たす必要があるため、少なくとも $p \geq 0.03$ である必要がある。

図2は、横軸を正規化ラプラシアン行列の固有値、縦軸を密度とし、 $p = 0.01, 0.1$ とした場合のリンクの重みを指数乱数で与えた ER ネットワークにおける正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布を棒グラフ、半円分布を実線で示したものである。その際、最小固有値0は除外して分布をプロットした。また、比較のため実線の半円は以下の関数を表示した。

$$\rho(x) = C \sqrt{(\bar{\lambda}_{\max} - 1)^2 - (x - 1)^2} \quad (C: \text{規格化定数}) \quad (9)$$

ここで、 $\bar{\lambda}_{\max}$ は正規化ラプラシアン行列の最大固有値であり、 C は半円分布の面積を1にする定数である。比較用の半円分布として、最大固有値 $\bar{\lambda}_{\max}$ を用いた式(9)を用いて表記したが、固有値1を中心として対称となっていることから、第二最小固有値を用いて半円分布を描くことも可能である。 $p = 0.01$ では、固有値密度分布が半円則を破っていて、固有値が1付近に

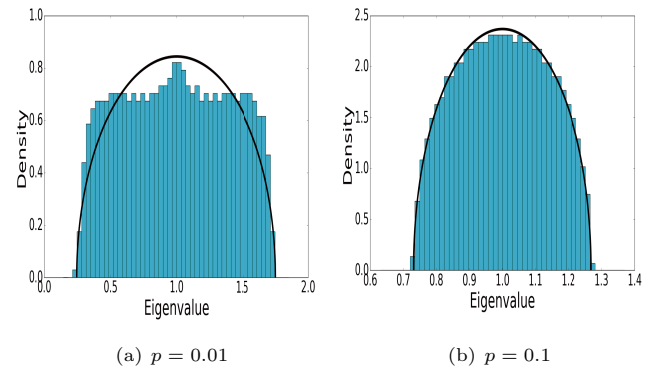


図2 リンクの重みを指数乱数で与えた ER ネットワークの固有値分布

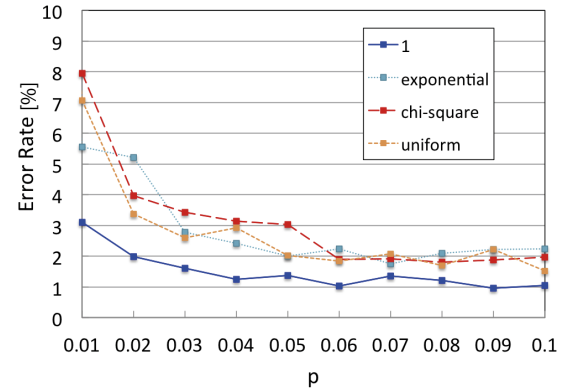


図3 ER ネットワークにおける乱数ごとの誤差率

集中していることがわかる。一方、 $p = 0.1$ では固有値密度分布が半円則によく従っているのがわかる。

図3は、横軸を p 、縦軸を固有値分布と半円分布とのずれを表す誤差率とし、 p の変化に対するリンクの重みを定数 = 1、カイ二乗乱数、一様乱数、指数乱数とした場合のそれぞれの誤差率を示したものである。その際、発散を防ぐため、誤差率は両端部を除外して算出している。 p が大きくなるにつれ、誤差率は低くなっている。また、 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たす p が大きい部分では、誤差率はどの乱数の場合でも低い値となっているため、図3の結果が示す精度で固有値密度分布が半円則に従うことがわかる。

4.2 リンクの重みを考慮した BA ネットワークにおける結果

本項では、リンクの重みを乱数で与えた BA ネットワークにおける正規化ラプラシアン行列の固有値分布が半円則を満たすための条件の調査結果を示す。また、ノード数 $n = 1000$ 、 $m_0 = m = 20$ とし、分析結果は50回の平均とした。ER ネットワークでは確率 p によって次数を変化させたため、BA ネットワークでも同様な操作をする必要がある。そこで、本研究では、BA ネットワークのリンクを確率 $1 - q$ で切ることによって次数を変化させた。ただし、非連結になるのを防ぐため $q \geq 0.5$ とした。

図4は、 q の変化に対する、重みのない BA ネットワークの最小次数の2乗 $d_{\min}^2$ と平均次数 d_{ave} の変化を示したものである。 q が大きくなるにつれ、 $d_{\min}^2$ 、 d_{ave} ともに大きくなっており、 $d_{\min}^2$ は d_{ave} に比べ2乗の分だけ急激に増加する。また、リ

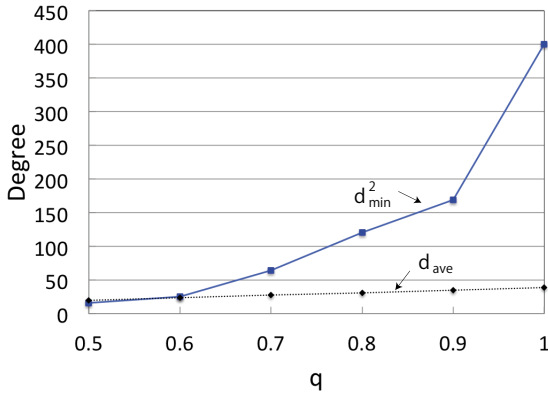


図4 最小次数の2乗と平均次数

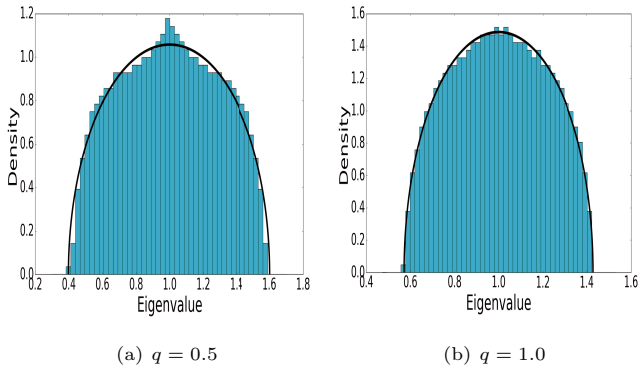


図5 リンクの重みを指数乱数で与えたBAネットワークの固有値分布

リンクに重みのないBAネットワークにおける正規化ラプラス行列の固有値密度分布が半円則に従う条件 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たすには、 $d_{\min}^2 > d_{\text{ave}}$ を満たす必要があるため、少なくとも $q \geq 0.7$ である必要がある。

図5は、横軸を正規化ラプラス行列の固有値、縦軸を密度とし、 $q = 0.5, 1.0$ とした場合のリンクの重みを指数乱数で与えたBAネットワークにおける正規化ラプラス行列の固有値密度分布を棒グラフ、半円分布を実線で示したものである。その際、最小固有値0は除外して分布をプロットした。また、半円分布は式(9)の関数に従うものとした。 $q = 0.5$ では、固有値密度分布が半円則を破っており、 $q = 1.0$ では、固有値密度分布が半円則に従っているのがわかる。図6は、横軸を q 、縦軸を誤差率とし、 q の変化に対するリンクの重みを1、カイ二乗乱数、一様乱数、指数乱数とした場合のそれぞれの誤差率を示したものである。 q が大きくなるにつれ、誤差率は低くなっている。また、 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たす q が大きい部分では、誤差率はどの乱数の場合でも低い値となっているため、図6の結果が示す精度で固有値密度分布が半円則に従うことがわかる。

4.3 応用例：ランダムウォークの自己回帰率

ERネットワーク及びBAネットワークのリンクにカイ二乗乱数、一様乱数、指数乱数で重みを与えた正規化ラプラス行列の固有値密度分布は、次数条件 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たす場合、それぞれ半円則に従うことがわかった。これは、乱数の種類に依らず成り立っているため、重みがある一部の社会ネットワークに当てはまる性質と考えられる。

ここで、半円則が成り立つ場合の社会ネットワーク分析にお

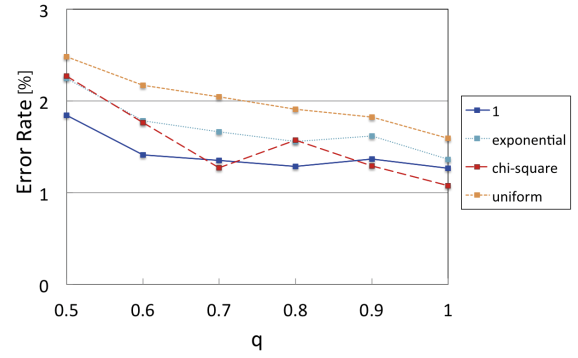


図6 BAネットワークにおける乱数ごとの誤差率

ける応用について述べる。本研究結果より、社会ネットワークの一部を表す重み付きのERネットワーク及びBAネットワークが、次数条件 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たす場合、正規化ラプラス行列の固有値密度分布は半円則に従うことが分かった。また、式(9)より、半円分布は最大固有値もしくは第二最小固有値のみで描くことができる。したがって、正規化ラプラス行列の固有値密度分布が半円則に従う場合、その固有値密度分布は最大固有値もしくは第二最小固有値のみで導出可能である。

正規化ラプラス行列の固有値密度分布は、ランダムウォーク現象における自己回帰率が正規化ラプラス行列の固有値密度のみで導出できることが報告されている[10]。ランダムウォーク現象における自己回帰率 $P_0(t)$ は以下のように書ける。

$$P_0(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n e^{-\bar{\lambda}_m t} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_m) e^{-\bar{\lambda} t} d\bar{\lambda} \quad (11)$$

また、正規化ラプラス行列のスペクトル密度 $\rho(\bar{\lambda})$ は以下のように書ける。

$$\rho(\bar{\lambda}) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_m) \quad (12)$$

式(11)と式(12)より、自己回帰率 $P_0(t)$ は以下のように書ける。

$$P_0(t) = \int_0^{\infty} \rho(\bar{\lambda}) e^{-\bar{\lambda} t} d\bar{\lambda} \quad (13)$$

式(13)は、ランダムウォーク現象を特徴づける基本的な量の一つである自己回帰率 $P_0(t)$ が正規化ラプラス行列の固有値密度分布関数を求めるだけで計算できることを意味している。

したがって、次数条件 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ を満たす、一部の社会ネットワークにおける正規化ラプラス行列の最大固有値もしくは第二最小固有値のみを推定することで、そのネットワーク上のランダムウォーク現象における自己回帰率を推定可能であることが考えられる。

5. おわりに

本稿では、社会ネットワーク分析の方法として、リンクの重みを乱数で与えたグラフの正規化ラプラス行列の固有値密

度分布を評価し、固有値密度分布が半円則を満たすための条件を実験的に調査した。また、半円則が成り立つ場合における社会ネットワーク分析の応用例について検討した。

リンクの重みを考慮した ER ネットワークでは、次数条件 $d_{\min}^2 \gg d_{\text{ave}}$ において、リンクの重みをカイ二乗乱数、指数乱数、一様乱数のそれぞれで与えた正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布は全て半円則に従うことが分かった。また、リンクの重みを考慮した BA ネットワークにおいても同様な結果が得られた。ここで、半円分布は正規化ラプラシアン行列の最大固有値または第二最小固有値のみで描くことができる。したがって、半円則に従う場合、正規化ラプラシアン行列の固有値密度分布は最大固有値または第二最小固有値のみで求めることができる。また、社会ネットワーク分析の応用例として、次数条件を満たす、一部の社会ネットワークにおけるランダムウォーク現象の自己回帰率の導出を検討した。

今後は、正規化ラプラシアン行列の固有値だけではなく、固有ベクトルの普遍的性質についても調査する予定である。

謝 辞

本研究は科研費基盤研究 (B) 26280032 より研究費の支援を受けて実施したものです。

文 献

- [1] F. Chung, *Spectral Graph Theory*, American Mathematical Society, 1997.
- [2] F. Chung, Linyuan Lu, *Complex graphs and networks*, American Mathematical Society, 2006.
- [3] I. J. Farkas, I. Derenyi, A. Barabasi, and T. Vicsek, “Spectra of “Real-World” Graphs: Beyond the Semi-Circle Law,” *Physical Review E*, vol. 64, 2001.
- [4] Jayendra N. Bandyopadhyay and Sarika Jalan, “Random matrix analysis of network Laplacians,” *Physica A*, vol. 387, pp. 667–674, 2008.
- [5] E. P. Wigner, “On the distribution of the roots of certain symmetric matrices,” *Annals of Mathematics*, vol. 67, pp. 325–327, 1958.
- [6] F. Chung, Linyuan Lu, and Van Vu, “The Spectra of Random Graphs with Given Expected Degrees,” *Internet Mathematics*, vol. 1, pp. 257–275, 2004.
- [7] P. Erdos and A. Renyi, “On Random Graphs,” *Publ. Math*, vol. 6, pp. 290–297, 1959.
- [8] A. L. Barabasi, R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, pp. 509–512, 1999.
- [9] M. Aida, C. Takano, and M. Murata, “Oscillation model for network dynamics caused by asymmetric node interaction based on the symmetric scaled Laplacian matrix,” *The 12th International Conference on Foundations of Computer Science (FCS 2016)*, pp. 38–44, 2016.
- [10] 羽田野 直道, “複雑ネットワーク上の量子ウォークのゼロ固有値局在,” *生産研究*, vol. 65, no. 3, pp. 301–305, 2013.