問題7

問題7を選択する場合は，以下の[7a], [7b]にそれぞれ1枚の共通解答用紙を用い，両方に解答しなさい。

[7a] 次に示すのはC言語(C programming language)で記述したプログラムとその実行例である。空欄（A）には任意の自然数(natural number)が入る。実行例は空欄(A)が2のとき，及び3のときのものである。この実行例は等幅フォント(monospaced font)で表示されている。このプログラムについて，以下の問いに答えなさい。

```c
#include <stdio.h>
#define   N  [ (A) ]

int rod[3][N];
int ndisk[3];

int disk[N+1][2*N+1];

void nchar(int n, int c){
  while( [ (ア) ] ) putchar(c);
}

void slice(int r, int k){
  int i;
  for(i=0; i<2*N+1; i++)
    putchar(
      disk[([ (イ) ])?rod[r][k]:0][i]
    );
}

void disp(void) {
  int i, j;
  for(i=0; i<(N*2+1)*3-N; i++)
    if (([ (ウ) ])%([ (エ) ])) putchar(' ');
    else putchar('A'+([ (オ) ])/([ (エ) ])-1);
  putchar('\n');
  for(i=0; i<=N; i++){
    for(j=0; j<3; j++) slice(j, N-i);
    putchar('\n');
  }
  for(i=0; i< [ (カ) ]; i++) putchar('~');
  putchar('\n');
}

void push(int r, int v) {
  rod[r][[ (キ) ]] = v;
}

int pop(int r) {
  return(rod[r][[ (ク) ]]);
}

void move(int from, int to) {
  [ (ケ) ] int seq;
  printf("%d. Move disk %d from %c to %c.\n\n",
     ++seq,
     [ (コ) ],
     'A'+from, 'A'+to);
  push(to,pop(from));
  disp();
}

void hanoi(int n, int a, int b, int c) {
  if (n>0){
    hanoi(n-1, a, c, b);
    move(a,b);
    hanoi(n-1, c, b, a);
  }
}
```

(右上へ続く)

```c
void init(void) {
  int i, j;

  for(i=0; i<N; i++) rod[0][i] = [ (サ) ];
  ndisk[0] = [ (シ) ];

  for(i=0; i<=N; i++)
    for(j=0; j<=N; j++)
      if (j==[ (ス) ])
        disk[i][j] = (i==[ (セ) ])?'|':'0'+i;
      else if (j<[ (ソ) ])
        disk[i][j] = disk[i][[ (タ) ]] = ' ';
      else {
        disk[i][j]        = '(';
        disk[i][[ (タ) ]] = ')';
      }
}

int main(void) {
  init(N);
  disp();
  hanoi(N,0,2,1);
  return 0;
}
```

実行例

(a) 空欄(A)が2のとき

```
  A    B    C
  |    |    |
 (1)   |    |
((2))  |    |
~~~~~~~~~~~~~~~
1. Move disk 1 from A to B.

  A    B    C
  |    |    |
  |    |    |
((2)) (1)   |
~~~~~~~~~~~~~~~
2. Move disk 2 from A to C.

  A    B    C
  |    |    |
  |    |    |
  |   (1) ((2))
~~~~~~~~~~~~~~~
3. Move disk 1 from B to C.

  A    B    C
  |    |    |
  |    |   (1)
  |    |  ((2))
~~~~~~~~~~~~~~~
```

(b) 空欄(A)が3のとき

```
   A      B      C
   |      |      |
  (1)     |      |
 ((2))    |      |
(((3)))   |      |
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
1. Move disk 1 from A to C.

   A      B      C
   |      |      |
   |      |      |
 ((2))    |      |
(((3)))   |     (1)
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

        (中略)

   A      B      C
   |      |      |
   |      |      |
   |      |    ((2))
  (1)     |   (((3)))
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
7. Move disk 1 from A to C.

   A      B      C
   |      |      |
   |      |     (1)
   |      |    ((2))
   |      |   (((3)))
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
```

問 1 `nchar(n, c)`は文字 c を n 回出力する関数(function)である。空欄(ア)を適切な式(expression)で埋めなさい。

問 2 空欄(A)が 3 のとき, 配列 rod, ndisk, disk は関数 `init()`によって図1のように初期化される。空欄(サ)～(タ)を適切な式(expression)で埋めなさい。なお, 2つの(タ)には同じ式が入る。

ndisk[0]	3
ndisk[1]	0
ndisk[2]	0

	[0]	[1]	[2]
rod[0]	3	2	1
rod[1]	0	0	0
rod[2]	0	0	0

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
disk[0]	' '	' '	' '	'|'	' '	' '	' '
disk[1]	' '	' '	'('	'1'	')'	' '	' '
disk[2]	' '	'('	'('	'2'	')'	')'	' '
disk[3]	'('	'('	'('	'3'	')'	')'	')'

図1

問 3 図2は空欄(A)が 3 のときの関数 `push()`, `pop()`の動作を説明したものである。これは実行例(b)の 1 番目の状態から 2 番目の状態への変化に対応している。空欄(キ), (ク)を適切な式(expression)で埋めなさい。

ndisk[0]	3
ndisk[1]	0
ndisk[2]	0

	[0]	[1]	[2]
rod[0]	3	2	1
rod[1]	0	0	0
rod[2]	0	0	0

$\longrightarrow$ `push(2,pop(0))`

ndisk[0]	2
ndisk[1]	0
ndisk[2]	1

	[0]	[1]	[2]
rod[0]	3	2	1
rod[1]	0	0	0
rod[2]	1	0	0

図2

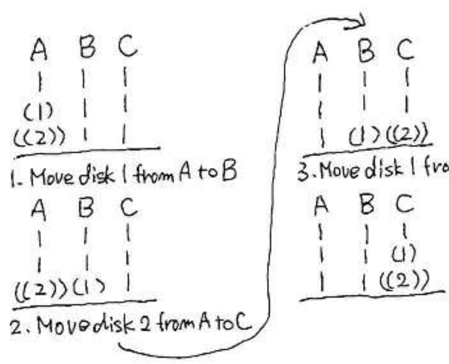
問 4 関数 `slice()`と `disp()`について, 空欄（イ）～（カ）を適切な式(expression)で埋めなさい。なお, 2つの（エ）には同じ式が入る。

問 5 関数 `move()`について, 以下の問いに答えなさい。

(1) 空欄(ケ)を適切な記憶域クラス指定子(storage duration specifier)で埋めなさい。

(2) 空欄(コ)を適切な式(expression)で埋めなさい。

問 6 空欄(A)が3のときの実行結果は実行例の(b)にその一部が図示されている。(中略)の部分も含めてすべての実行結果を次の例に従って図示しなさい。



[7b] 以下の注意にしたがって，問 1～ 問 4 に答えなさい。

注意) 必要に応じて次の値を用い，小数 2 位を四捨五入し小数第 1 位まで計算すること (round off it to first decimal places)。 $\log_2 3 \approx 1.58$, $\log_2 5 \approx 2.32$

問 1 3 元マルコフ情報源（3 Markov Information Source） S={0,1,2} が状態遷移行列（state transition probability matrix） $P = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$ にしたがうとき，次の問いに答えなさい。

(1) 状態遷移線図（state transition diagram）を描きなさい。
(2) 正規マルコフ情報源（regular Markov information source）かどうかを判定しなさい。
※ 判定過程も示すこと（Show your decision process to reach your conclusion）
(3) 定常分布（stationary distribution） $Z=(z_1,z_2,z_3)$ を求めなさい。

問 2 3^k ($k \in$ N：自然数) 枚の硬貨（coin）の中に 1 枚だけ重量の軽い贋金（counterfeit coin）が含まれている。天秤（a pair of scales）を用いて以下の①～③の手順で贋金を特定しようとするとき(1)から(3)の問いに答えなさい。

① 硬貨を 3 等分し三つの組を作り，それぞれ第 1 組，第 2 組，第 3 組と呼ぶことにする。
② 第 1 組と第 2 組を天秤にかけ，
- 「第 1 組が軽ければ，贋金は第 1 組にある。」
- 「第 2 組が軽ければ，贋金は第 2 組にある。」
- 「つり合えば，贋金は第 3 組にある。」

③ 贋金が含まれている組の硬貨の枚数が 1 ならば終了。そうでなければ贋金が含まれている組を対象として①へ戻る。

(1) 贋金を特定するために得なければならない情報量を求めなさい。
(2) 天秤を使用するたびに得られる情報量を求めなさい。
(3) 贋金を特定するために要する天秤の使用回数を求めなさい。

問 3 要素数 n からなる確率事象系（stochastic event system） A のエントロピー $H(A)$ について次の問いに答えなさい。

(1) $n=2$ で，一方の事象の生起確率を p としたとき $H(A)$ の最大値と，そのときの p の値を求めなさい。また，その導出過程も記述しなさい。
(2) $n=3$ のとき，$n=5$ のときの最大エントロピーの差を求めなさい。

問 4 情報源（information source） $S=\{a, b, c, d, e\}$ に対する下表の符号化（encoding） C_1～C_6 について次の問いに答えなさい。

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
a	0	1	0	0	100	1
b	10	110	10	01	101	01
c	110	001	110	011	110	000
d	1110	011	1110	0111	111	0010
e	1011	101	11110	01111	000	0011

(1) 一意に復号化（decoding）不可能な符号を挙げ，その理由を示しなさい。
(2) 瞬時符号を挙げ，その理由も示しなさい。
(3) 情報源 $S = \begin{Bmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{16} \end{Bmatrix}$ のコード化として最適な符号を C_1～C_6 の中から選び，その理由も示しなさい。

問題8 【8a】

問題 8 を選択する場合は，以下の[8a], [8b]にそれぞれ 1 枚の共通解答用紙を用い，両方に解答しなさい。

[8a] 図 1 のグラフGについて，以下の問 1～問 6 に答えなさい。ただし，各無向枝(undirected edge)に付けられた値は枝の重みである。

問 1 グラフGの最小木(minimum spanning tree) $T_{\min}$とそのコスト(最小木を構成する枝の重みの総和) $Cost_{\min}$を求めなさい。

問 2 問 1 で求めた最小木$T_{\min}$に関する基本タイセット(fundamental tie-set)のうち，コスト(基本タイセットを構成する枝の重みの総和)が最大になる基本タイセット$L_{\max}$とそのコスト$Cost^{L}_{\max}$を求めなさい。

問 3 問 1 で求めた最小木$T_{\min}$に関する基本カットセット(fundamental cutset)のうち，コスト(基本カットセットを構成する枝の重みの総和)が最大になる基本カットセット$C_{\max}$とそのコスト$Cost^{C}_{\max}$を求めなさい。

問 4 グラフGの各無向枝の重みを，各無向枝の両端点間の距離としたとき，点 S-点 T 間の最短経路$P_{\min}$と最短経路長$L_{\min}$をダイクストラ法(Dijkstra's Algorithm)を用いて求めなさい。

問 5 最短経路を求める過程で，ダイクストラ法の副産物として得られる木T_{D}を求めなさい。

問 6 問 4 の最短経路問題(shortest path problem)を，以下の方針にしたがって，線形計画問題(linear programming problem)として定式化しなさい。

方針：各枝に変数を対応させ，経路が通過する枝であれば値 1，そうでなければ値 0 とする。つぎに各変数の値を 0 から 1 までの範囲の連続変数(continuous variable)として緩和する(relaxation)。各点が満たすべき条件を制約条件(constraint)とする。

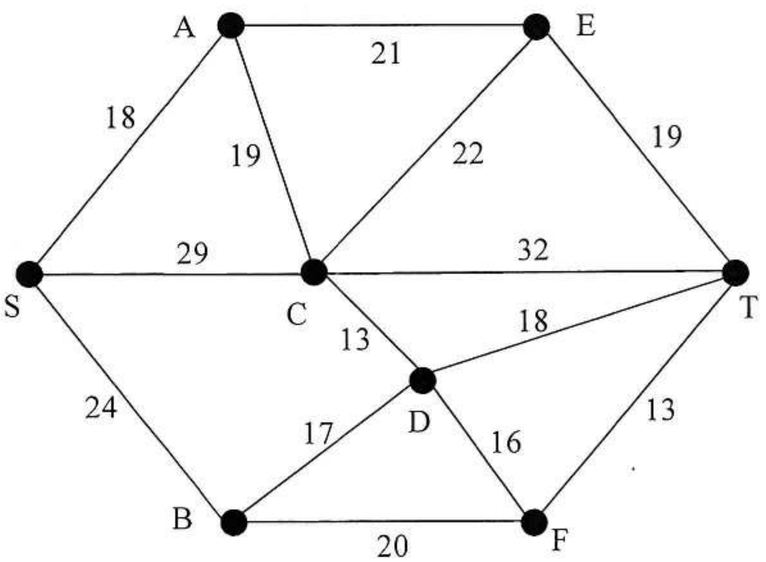


図 1 グラフG

[8b]　以下の問１，問２に答えなさい。

問１　確率密度関数（probability density function）が $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}x(a-x) & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x < 0, x > a) \end{cases}$ で与えられる確率分布（probability distribution）について，以下の(1)～(4)の問いに答えなさい。ただし，$a > 0$ とする。

(1) 定数（constant value）a の値を求めなさい。

(2) 期待値（expectation）を求めなさい。

(3) 分散（variance）を求めなさい。

(4) 確率変数（random variable）X は確率密度関数 $f(x)$ で与えられる確率分布に従うものとする。ここで，Y=2X によって新たな確率変数 Y を定義するとき，Y の確率密度関数 $h(y)$ を求めなさい。

問２　Ａ市における地震（earthquake）の発生頻度（frequency）（単位時間あたりの平均発生回数）λ を，地震の発生間隔（interval of occurrence）の標本（sample）（$X_1, X_2, \cdots$）から推定したい。各標本は，同一の母集団分布（population distribution）に従って分布しているとする。このとき，以下の（１）～（５）の設問に答えなさい。なお，必要であれば解答に際し，地震の発生間隔の期待値（expectation）の逆数（reciprocal）は地震発生頻度 λ に等しいこと，および地震発生間隔の標本がそれぞれ指数分布（exponential distribution）に従うとき，$X_{\mathrm{sum}} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の確率密度関数（probability density function）は

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

に等しいことを用いて構わない。

(1) 地震の発生間隔の標本の逆数（$1/X_1$）は，一般に λ の不偏推定量（unbiased estimator）（その期待値が推定しようとする量に等しい推定量）とはならない。その理由を説明しなさい。

(2) $1/X_1$ が λ の不偏推定量になるのは，X_1 がどのような分布（distribution function）に従うときかを説明しなさい。

(3) 地震の発生間隔は全て同一の指数分布に従うとする。地震の発生間隔の二つの標本 X_1, X_2 を選び，その平均を $\bar{X}(2) = (X_1 + X_2)/2$ とする。$\bar{X}(2)$ の逆数の期待値を，λ を用いて表しなさい。

(4) $c/\bar{X}(2)$ が λ の不偏推定量になるように，定数（constant）c を定めなさい。

(5) 地震の発生間隔の n 個の標本の平均を $\bar{X}(n) = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ とする。(4)と同様の考え方を用いて，$c/\bar{X}(n)$ が λ の不偏推定量になるように，定数 c を定めなさい。